N° d'ordre 2188
ORSAY
Série A

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS - SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR 3e CYCLE

SPÉCIALITÉ : ANALYSE NUMÉRIQUE

par : M. A. KERAMSI

Sujet de la Thèse :

RÉSOLUTION PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS D'ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

Soutenue le 15 décembre 1976 devant la Commission d'Examen

M. TEMAM Président

M. TARTAR
M. JOURON } Examinateurs

N° d'ordre 2188
ORSAY
Série A

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS - SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR 3e CYCLE

SPÉCIALITÉ : ANALYSE NUMÉRIQUE

par : M. A. KERAMSI

Sujet de la Thèse :

RÉSOLUTION PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS D'ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

Soutenue le 15 décembre 1976 devant la Commission d'Examen

M. TEMAM Président

M. TARTAR, M. JOURON } Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Que Monsieur TEMAM trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour m'avoir permis d'entreprendre ce travail.

Ma gratitude va également à Monsieur DAUBERT Chef du Laboratoire National d'Hydraulique d'E.D.F., pour m'avoir accueilli dans son département et pour s'être intéressé personnellement à ce travail.

Je remercie Messieurs BOULOT et BENQUE pour leur collaboration.

Je remercie Messieurs TARTAR et JOURON d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens enfin à remercier particulièrement Monsieur BOISSERIE qui m'a fourni le support informatique sans lequel ce travail n'aurait pas été possible.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548102_0028

INTRODUCTION

La physique des fluides met en évidence un certain nombre de phénomènes élémentaires dont la mise en équation aboutit à des modèles simplifiés utilisables seulement pour des écoulements très particuliers.

La description d'un écoulement réel est alors la plupart du temps la "superposition" de ces modèles élémentaires. On utilise couramment quatre modèles simplifiés, à savoir :

I $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = g \right.$ (où $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + (\vec{f} . \vec{\nabla}) \vec{f} = \vec{g}$

qui caractérise la variation d'une quantité par transport (ou convection).

II $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div } \vec{U} = 0 & \text{exprime la conservation de la masse pour un fluide compressible} \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + C^2 (P) \overrightarrow{\text{grad}} P = f & \text{exprime la variation de quantité de mouvement due aux variations de pression} \end{array} \right.$

III $\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \vec{U} = 0 & \text{conservation de la masse pour un fluide incompressible} \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} P - \nu \Delta \vec{V} = \vec{f} & \text{variation de quantité de mouvement due à sa diffusion et aux variations de pression} \end{array} \right.$

IV $\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} - K \Delta f = g \right.$ qui exprime la variation d'une quantité par diffusion

Notre travail a donc eu pour but de résoudre numériquement chacun de ces opérateurs (nous ne parlerons pas dans cet exposé du modèle IV qui ne présente dans les cas classiques aucune difficulté particulière).

Les modèles II et III décrivent (à la diffusion près) le même phénomène physique mais l'expression de la conservation de la masse pour un fluide

incompressible conduit à une difficulté supplémentaire c'est pourquoi les méthodes numériques employées seront distinctes ; en revanche les méthodes utilisées pour les équations I et II différant peu nous avons essayé de résoudre globalement une équation très utilisée en hydrodynamique et qui réunit principalement ces deux phénomènes : l'équation de Saint-Venant.

P L A N

CHAPITRE I - LES EQUATIONS

1 - Présentation

2 - Méthode à pas fractionnaires

a) Schéma utilisé pour l'équation de Navier Stokes
b) Schéma utilisé pour l'équation de Saint-Venant

CHAPITRE II - EQUATION DE TRANSPORT

1 - Position du problème

2 - Semi-discrétisation

3 - Une condition de positivité de l'opérateur semi-discret

CHAPITRE III - APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

1 - Problème approché

2 - Définition de l'espace V_h

a) Approximation P1
b) Approximation P2

CHAPITRE IV - L'EQUATION DE PROPAGATION

1 - Formulation

2 - Semi-discrétisation en temps

3 - Approximation en éléments finis (exemples numériques)

CHAPITRE V - L'EQUATION DE SAINT-VENANT

1 - Conditions aux limites

2 - Formulation

3 - Semi-discrétisation en temps

4 - Approximation en éléments finis - Résultats

CHAPITRE VI - L'EQUATION DE DIFFUSION

1 - Formulations variationnelles

2 - Semi-discrétisation en temps

3 - Approximation en éléments finis

ANNEXE : PROGRAMME DE CALCUL

CHAPITRE I - LES EQUATIONS

I - PRESENTATION

Deux équations sont classiquement utilisées en hydraulique : l'équation de Navier-Stokes et l'équation de Saint-Venant.

- L'équation de Navier-Stokes régit l'écoulement des fluides incompressibles.

  Si $\vec{V}$ est le champ de vitesse au sein du fluide,
  P le champ de pression,
  ρ et ν respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide,
  $\vec{F}$ les forces de volume,

  alors l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \,.\, \nabla)\,\vec{V} - \nu \,\Delta \vec{V} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, P \\ \\ \text{div}\,\vec{V} = 0 \qquad\qquad \text{équation de continuité.} \end{cases}$$

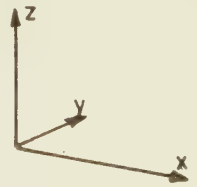
- Les équations de Saint-Venant sont utilisées pour le calcul des écoulements à surface libre quasi-horizontaux et peuvent être déduites des équations de Navier-Stokes (cf. A. DAUBERT et J.P. BENQUE [1]).

  Si u v w désignent les trois composantes de la vitesse suivant les axes x, y, z

  $Z(x,y,t)$ la cote de la surface libre

  $Z_F(x,y)$ la cote du fond

  $h = Z - Z_F$ le tirant d'eau



  en négligeant l'accélération verticale devant celle de la pesanteur, les équations du mouvement s'écrivent :

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial uv}{\partial y} + \dfrac{\partial uw}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu_h \Delta_{xy} u + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu_z \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + F_x \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial uv}{\partial x} + \dfrac{\partial v^2}{\partial y} + \dfrac{\partial vw}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu_h \Delta_{xy} v + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu_z \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + F_y \\ P = \rho\, g\, (Z - z) + P_{atm}(x,y) \end{cases}$$

$P_{atm}(x,y)$ désignant la pression atmosphérique au point (x,y,Z) de la surface libre

$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ désignant les forces de volume

et l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

On cherche alors le mouvement moyen sur une verticale en écrivant :

$$u = \overline{U} + u' \qquad v = \overline{V} + v' \qquad \text{telles que} \int_{Z_F}^{Z} u'\, dz = 0 \quad \int_{Z_F}^{Z} v'\, dz = 0$$

En utilisant l'imperméabilité du fond et de la surface libre qui permettent d'écrire :

$$w(x,y,Z,t) = \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u(x,y,Z,t)\frac{\partial Z}{\partial x} + v(x,y,Z,t)\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$w(x,y,Z_F,t) = \frac{dZ_F}{dt} = u(x,y,Z_F,t)\frac{\partial Z_F}{\partial x} + v(x,y,Z_F,t)\frac{\partial Z_F}{\partial y}$$

et en intégrant les équations (I) sur la profondeur d'eau, on obtient :

$$
(II)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u} h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}\, h}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{u} h}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}\,\bar{v}\, h}{\partial y} + \dfrac{\partial h\, \bar{u'}^2}{\partial x} + \dfrac{\partial h\, \overline{u'v'}}{\partial y} = -gh \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{h}{\rho} \dfrac{\partial Patm}{\partial x} \\
\qquad + \left[\nu_z \dfrac{\partial u'}{\partial z}\right]_{Z_F}^{Z} + \int_{Z_F}^{Z} \nu_h \Delta u \, dz + \int_{Z_F}^{Z} F_x \, dz \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{v} h}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}\,\bar{v}\, h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}^2 h}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{u'v'} h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v'}^2 h}{\partial y} = -gh \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{h}{\rho} \dfrac{\partial Patm}{\partial y} \\
\qquad + \left[\nu_z \dfrac{\partial v'}{\partial z}\right]_{Z_F}^{Z} + \int_{Z_F}^{Z} \nu_h \Delta v \, dz + \int_{Z_F}^{Z} F_y \, dz
\end{cases}
$$

en faisant des hypothèses classiques sur les termes :

$$\frac{\partial}{\partial y} h \overline{u'v'} \ldots\ldots \text{ et } \left[\nu_z \frac{\partial u'}{\partial z}\right] + \int_{Z_F}^{Z} \nu_h \Delta u \, dz$$

on obtient les équations suivantes dites de Saint-Venant :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u} h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v} h}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{u} h}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}\,\bar{v}\, h}{\partial y} = -gh \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{h}{\rho} \dfrac{\partial Patm}{\partial x} + \nu \operatorname{div}(h \operatorname{grad} \bar{u}) + \tau_{vent} \\
\qquad - g \dfrac{\bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C} + F \bar{v} h \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{v} h}{\partial t} + \dfrac{\partial \overline{u\,v}\, h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}^2 h}{\partial y} = -gh \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{h}{\rho} \dfrac{\partial Patm}{\partial y} + \nu \operatorname{div}(h \operatorname{grad} \bar{v}) + \tau_{vent} \\
\qquad \underbrace{- g \dfrac{\bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C}}_{\text{frottements au fond}} \underbrace{- F \bar{u} h}_{\text{force de Coriolis}}
\end{cases}
$$

Cette équation appelle plusieurs remarques :

1°) On s'intéresse la plupart du temps à des écoulements où les effets de couche limite ne sont pas essentiels, on néglige alors la diffusion ($\nu = 0$) et les équations de Saint-Venant deviennent alors hyperboliques.

L'étude des surfaces caractéristiques permet alors de déterminer le nombre de conditions aux limites :

quand le courant pénètre, à la vitesse u, dans le domaine alors si $\bar{u} < \sqrt{gH}$ il faut 2 conditions aux limites sur la frontière du domaine où le courant entre et 1 condition ailleurs si $\bar{u} > \sqrt{gH}$, 3 conditions aux limites sont nécessaires quand le courant entre et aucune conditions ailleurs.

2°) L'étude physique des phénomènes permet de mettre en évidence dans cette équation 3 types d'opérateurs :

un opérateur de diffusion
$$\begin{cases} \nu \operatorname{div} (h \operatorname{grad} \bar{u}) \\ \nu \operatorname{div} (h \operatorname{grad} \bar{v}) \end{cases}$$

un opérateur de propagation
$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u} h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v} h}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \bar{u}h}{\partial t} - gh \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{h}{\rho} \dfrac{\partial Patm}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{v}h}{\partial t} - gh \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{h}{\rho} \dfrac{\partial Patm}{\partial y} \end{cases}$$

un opérateur de convection
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}\,\bar{v}\,h}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \bar{u}\,\bar{v}\,h}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}^2 h}{\partial y} \end{cases}$$

Cette distinction peut se faire dans toutes les équations de l'hydrodynamique et en particulier dans l'équation de Navier-Stokes où la partie linéaire est une "diffusion",la partie non linéaire étant une "convection".

On met ainsi en évidence la notion d'opérateur élémentaire et la méthode des pas fractionnaires permet de tenir compte concrètement de cette distinction.

2 - METHODE DES PAS FRACTIONNAIRES

Cette méthode est basée sur la décomposition des opérateurs pour les problèmes d'évolution. Introduite au départ pour construire des schémas économiques (YANENKO [1]) elle a été systématisée et théoriquement validée dans de nombreux cas par plusieurs auteurs et en particulier R.TEMAM[1].

Les schémas que nous utiliserons n'entrent pas tous dans les cas étudiés leur validité étant admise a posteriori.

Les schémas que nous utiliserons seront tous basés sur la décomposition introduite précédemment car dans de nombreux cas cette décomposition paraît conduire aux schémas les plus stables.

a) Schéma utilisé pour l'équation de Navier-Stokes

L'intervalle de temps $[0,T]$ est divisé en N intervalles de longueur ΔT.

U^o désigne une approximation de $U(x,y,o)$

U^k désigne une approximation de U au temps $\frac{kT}{N}$

$\begin{pmatrix} \vec{U}^o & \dots & \vec{U}^n \\ P_o & \dots & P_n \end{pmatrix}$ étant déterminés, on calcule $\begin{pmatrix} \vec{U}^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix}$ par

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{U}^{n+1/2} - \vec{U}^n}{\Delta T} + (\vec{U} \cdot \nabla)\,\vec{U} = 0 \\ \dfrac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n+1/2}}{\Delta T} - \nu \Delta \vec{U}^{n+1} + \dfrac{1}{\rho} \operatorname{grad} P^{n+1} = f^{n+1} \\ \operatorname{div} \vec{U}^{n+1} = 0 \end{cases}$$

On voit donc que ce schéma est équivalent numériquement à la résolution d'une équation de transport (linéarisation par rapport au temps) et du problème de Stokes.

Ce schéma déjà utilisé en différences finies a donné des résultats satisfaisants dans le cas de domaines rectangulaires.

b) Schéma utilisé pour l'équation de Saint-Venant

La décomposition se fait suivant le même principe que pour l'équation de Navier-Stokes avec en plus un opérateur de propagation.

On pose $U = \bar{u}\, h$, $V = \bar{v}\, h$; U^n V^n h^n sont les valeurs connues de U, V, h à l'instant $n\,\Delta t$. On calcule U^{n+1} V^{n+1} h^{n+1} par le schéma suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{U^{n+1/3} - U^n}{\Delta t} + \dfrac{\partial U\,\bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial U\,\bar{v}}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{V^{n+1/3} - V^n}{\Delta t} + \dfrac{\partial V\,\bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial V\,\bar{v}}{\partial y} = 0
\end{array}
\right\} \text{ convection} \\[3ex]
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{U^{n+2/3} - U^{n+1/3}}{\Delta t} - \nu\,\mathrm{div}\,(h\,\mathrm{grad}\,\bar{u}) - \tau_{x_{vent}} + g\,\dfrac{\bar{u}\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}}{C} - FV = 0 \\[2ex]
\dfrac{V^{n+2/3} - V^{n+1/3}}{\Delta t} - \nu\,\mathrm{div}\,(h\,\mathrm{grad}\,\bar{v}) - \tau_{y_{vent}} + g\,\dfrac{\bar{v}\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}}{C} + FU = 0
\end{array}
\right\} \text{diffusion} \\[3ex]
\dfrac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{U^{n+1} - U^{n+2/3}}{\Delta t} + gh\,\dfrac{\partial h}{\partial x} + gh\,\dfrac{\partial Z_F}{\partial x} + \dfrac{g}{\rho}\,\dfrac{\partial P_{atm}}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{V^{n+1} - V^{n+2/3}}{\Delta t} + gh\,\dfrac{\partial h}{\partial y} + gh\,\dfrac{\partial Z_F}{\partial y} + \dfrac{g}{\rho}\,\dfrac{\partial P_{atm}}{\partial y} = 0
\end{array}
\right\} \text{ propagation}
\end{array}
\right.
$$

Notre travail a donc consisté en la résolution des différents opérateurs élémentaires avec pour buts principaux :

1°) une amélioration par rapport aux programmes en différences finies au niveau du calcul et de la description du domaine;

2°) une résolution pas trop coûteuse car tous les phénomènes sont évolutifs et l'on doit la plupart du temps les étudier sur un "grand" intervalle de temps.

Ces deux buts imposent pratiquement :

1°) des méthodes d'éléments finis qui permettent une description fine du domaine ;

2°) des schémas très stables permettant le choix d'un pas en temps relativement "grand".

D'autre part les méthodes itératives sont pratiquement exclues car elles conduisent à des temps de calcul prohibitifs.

Nous avons donc essayé de résoudre en priorité les opérateurs hyperboliques (convection - propagation) qui posent le plus de problèmes.

La convection par une linéarisation par rapport au temps sera traitée comme une équation de transport.

Les méthodes utilisées jusqu'à présent pour l'équation de transport $\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en différences finies donnant les meilleurs résultats reviennent à écrire que le long des courbes caractéristiques définies par $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, f se conserve.

Les méthodes en éléments finis semblent poser davantage de problèmes. P. LESAINT a étudié une méthode d'éléments finis non conformes pour l'équation stationnaire :

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \sigma f = 0$$

Cette méthode semble particulièrement efficace pour les solutions "raides".

Nous proposons ici une méthode d'éléments finis conformes qui paraît bien adaptée aux types de solutions rencontrées en hydrodynamique.

CHAPITRE II - EQUATION DE TRANSPORT

1 - POSITION DU PROBLEME

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ "suffisamment" régulier, $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On considère alors l'équation suivante :

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial y} = f & \text{dans } \Omega \times [0,T] = Q \\ u_{|\Gamma_-} = g_t \\ u(x,y,o) = u_o(x,y) \end{cases}$$

Γ désigne la frontière de Ω, $\vec{n}$ la normale extérieure, $\vec{V} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ une application de Q dans $\mathbb{R}^2$ "assez régulière" $(C_1(Q))$.
Γ_- est l'ensemble des points de Γ pour lesquels $\vec{V} \cdot \vec{n}$ est négatif. On désigne d'autre part par $A(t)$. l'opérateur $\alpha \dfrac{\partial .}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial .}{\partial y}$.

2 - SEMI-DISCRETISATION EN TEMPS

On partage le segment $[0,T]$ en N intervalles de longueur $DT = T/N$, on note $t_n = n\ DT$

$$U^n = U(t_n,x,y)$$

L'échec d'une formulation en éléments finis classique conduisant à un schéma beaucoup trop amortissant nous a conduit à adopter une semi-discrétisation bien connue pour les méthodes de différences finies.

On désigne par λ un paramètre réel $\lambda \in]0,1]$. U^o ..... U^n étant connues, on va définir U^{n+1} par l'équation approchée suivante :

$$(II)\quad \begin{cases} \dfrac{U^{n+1} - U^n}{DT} + \lambda A(t_{n+1})\, U^{n+1} + (1-\lambda)\, A(t_n)\, U^n = 0 \\ U^{n+1}_{|\Gamma^-} = g_{t_{n+1}} \end{cases}$$

A chaque instant t_n nous aurons donc à résoudre le problème stationnaire suivant :

$$(III)\quad \begin{cases} Ku + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi \\ u_{|\Gamma^-} = h \end{cases}$$

Pour résoudre (III) nous allons utiliser une formulation introduite par FRIEDRICHS [1] et reprise par P. LESAINT [1] - [2] - [3] .

On note $H^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \; ; \; \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(\Omega) \text{ et } \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}$

On suppose d'autre part que l'équation (III) admet une solution unique régulière, c'est-à-dire au moins $H^1(\Omega)$. Alors si u est cette solution, on peut écrire :

$$(IV)\quad K(u,v)_{L^2(\Omega)} + \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}, v\right)_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\vec{V}.\vec{n} - |\vec{V}.\vec{n}|}{2} u, v\right)_{L^2(\Gamma)}$$

$$= (\varphi, v)_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\vec{V}.\vec{n} - |\vec{V}.\vec{n}|}{2} h, v\right)_{L^2(\Gamma)}$$

pour tout $v \in H^1(\Omega)$.

$(f,g)_{L^2(A)}$ désignant le produit scalaire dans $L^2(A)$ $\int_A fg$

L'intérêt d'introduire les conditions aux limites dans la formulation est qu'ainsi u et v appartiennent au même espace. Nous verrons que numériquement cet intérêt n'est pas négligeable. Une autre formulation

(qui a d'ailleurs été testée numériquement et qui donne des résultats semblables à IV) peut être : trouver $u \in H^1(\Omega)$

$$\text{tel que} \quad \begin{cases} K(u,v)_{L^2(\Omega)} + (\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}, v)_{L^2(\Omega)} = (\varphi, v)_{L^2(\Omega)} \\ u_{|\Gamma^-} = h \end{cases}$$

pour tout $v \in \mathcal{V}$ avec $\mathcal{V} = \{ \varphi \in H^1(\Omega) \; ; \; \varphi_{|\Gamma^-} = 0 \}$

3 - UNE CONDITION DE POSITIVITE

La formulation IV peut s'écrire :

$$K \int_\Omega uv + \frac{1}{2} \int_\Omega (\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}\, u) \, . \, v + \frac{1}{2} \int_\Omega (\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}\, u)\, v - \int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{n}\, u\, v = L(v)$$

avec $L(v) = \int_\Omega \varphi v - \int_{\Gamma^-} \vec{V} \cdot \vec{n}\, h\, v.$

En intégrant par parties $\frac{1}{2} \int_\Omega (\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}\, u).v$ on obtient :

$$K \int_\Omega uv + \frac{1}{2} \int_\Omega (\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}\, u)\, v + \frac{1}{2} \int_\Omega \vec{V} \cdot \vec{n}\, u\, v - \frac{1}{2} \int_\Omega u \, \text{div}(v \vec{V}) - \int_\Omega \vec{V} \cdot \vec{n}\, u\, v = L(v)$$

En faisant $v = u$, on obtient la relation :

$$K \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} \vec{V} \vec{n}\, u^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 \, \text{div}\, \vec{V} = L(u).$$

Soit B l'opérateur défini par $Bu = Ku + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}$. On dira que B est positif si et seulement si il existe une constante strictement positive telle que :

$$(B^* u, u) = K \| u \|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 \, \text{div}\, \vec{V} \geq C \| u \|^2_{L^2(\Omega)}$$

B^* étant l'adjoint formel de B.

On ne considèrera dans la suite que le cas où cette condition est réalisée.

Remarque :

Dans la pratique K étant destiné à être $\frac{1}{\lambda DT}$, cette condition de positivité pourra être satisfaite si div $\vec{V} \in L^{\infty}(\Omega)$ en prenant DT suffisamment petit.

D'autre part cette condition est automatiquement réalisée pour div $\vec{V} = 0$ (application à la résolution de l'équation de Navier Stokes par pas fractionnaires).

CHAPITRE III - APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

1 - PROBLEME APPROCHE

On désigne par $\mathcal{V}_h$ un espace de dimension finie "approchant" $H^1(\Omega)$. Le problème approché s'écrit alors :

trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ tel que : $\forall v_h \in \mathcal{V}_h$

$$K(u_h, v_h)_h + (\vec{V}_h \vec{\text{grad}}\, u_h, v_h)_h - \left(\frac{\vec{V}_h \vec{n} - |\vec{V}_h \vec{n}|}{2} u_h, v_h\right)_{\Gamma_h} = (\varphi_h, v_h)$$

$$- \left(\frac{\vec{V}_h \vec{n} - |\vec{V}_h \vec{n}|}{2} g_h, v_h\right)_{\Gamma_h}$$

où $(\ ,\ )_h$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega_h)$

$(\ ,\ )_{\Gamma_h}$ " " " " dans $L^2(\Gamma_h)$

g_h et φ_h étant les projections de g, φ sur $\mathcal{V}_h$.

- On considère une approximation interne de $H^1(\Omega)$ (en particulier $\Omega_h = \Omega$) alors le problème approché admet une solution unique.

Ce résultat découle immédiatement de la condition de positivité.

2 - APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

- On considère donc $\mathcal{V}_h$ espace de fonctions "simples" et $\left\{ W_i \right\}_1^{N(h)}$ une base de $\mathcal{V}_h$, posant $u_h^{n+1} = \sum_1^{N(h)} \mu_i^{n+1} W_i$ le problème approché correspondant à (I) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{N(h)} \mu_i^{n+1} \left(\frac{1}{DT} \int_\Omega W_i W_j + \lambda \int_\Omega (\vec{V}_h^{n+1} \cdot \vec{\text{grad}}\, W_i) W_j - \lambda \int_\Gamma \frac{\vec{V}_h^{n+1}.\vec{n} - |\vec{V}_h^{n+1}.\vec{n}|}{2} W_i W_j \right.$$

$$= \frac{1}{DT} \int_\Omega u_h^n W_j + (\lambda - 1) \int_\Omega (\vec{V}_h^n \vec{\text{grad}}\, u_h^n) W_j - \lambda \int_\Gamma \frac{\vec{V}_h^{n+1}.\vec{n} - |\vec{V}_h^{n+1}.\vec{n}|}{2} g_h^{n+1} W_j$$

pour j de 1 à $N(h)$.

Soit un système linéaire de $N(h)$ équations à $N(h)$ inconnues.

a) Définition de $\mathcal{V}_h$

On se donne un paramètre $h > 0$ destiné à tendre vers zéro et un recouvrement de $\bar{\Omega}$ par des fermés T_i de $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I(h)} T_i .$$

Nous considèrerons deux approximations (notées P_1 et P_2). Dans l'approximation P_1 les T_i seront des triangles tels que diam $(T_i) \leq h$ $\forall i \in [1, I(h)]$.

D'autre part l'intersection de deux triangles distincts sera soit vide, soit réduite à un sommet, soit à une face commune aux deux triangles.

Pour l'approximation P_2 les T_i seront des "triangles à côtés courbes" (notion précisée par la suite), les autres hypothèses faites sur l'approximation P_1 restant valables (diam $(T_i) \leq h$ et $T_i \bigcap T_j$).

On considèrera d'autre part pour chacune des approximations un triangle de référence $\hat{T}$ et un certain nombre de points $\hat{\Sigma}$ de ce triangle.

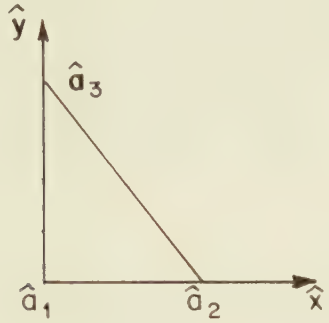
b) Approximation P_1

Le triangle de référence $\hat{T}$ est formé des points $\hat{a}_1(o,o)$ $\hat{a}_2(1,o)$ $\hat{a}_3(o,1)$ et $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3\}$ de sorte que $\hat{\Sigma}$ est P_1 - unisolvent P_1 désignant l'espace des polynômes sur $\hat{T}$ de degré ≤ 1 (cf. RAVIART [1]).

L'espace $\mathcal{V}_h$ sera l'espace des applications continues de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque triangle T_i est linéaire.

N(h) désignant le nombre de noeuds $\{M_i\}$ dans $\bar{\Omega}$ (sommets des triangles de la triangulation $\{T_i\}_{i=1}^{I(h)}$), on prendra comme base de $\mathcal{V}_h$ la famille $\{W_{M_i}\}_{i=1}^{N(h)}$ fonctions de $\mathcal{V}_h$ telles que $W_{M_i}(M_j) = \delta_{ij}$.

Soit $\hat{T}$ le triangle de référence:



Une base de P_1 est formée des polynômes

$$\begin{cases} \hat{P}_1 = 1 - \hat{X} - \hat{Y} \\ \hat{P}_2 = \hat{X} \\ \hat{P}_3 = \hat{Y} \end{cases}$$

Soit T un triangle $\{M_1, M_2, M_3\}$ non dégénéré, c'est-à-dire tels que $M_1\ M_2\ M_3$ ne soient pas alignés, alors il existe une unique application F_T inversible et affine telle que :

$$F_T(\hat{a}_j) = M_j \qquad j = 1, 2, 3 \qquad \text{de } \hat{T} \text{ sur } T$$

Si $M_j = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix}$ cette application est alors explicitement définie par :

$$F_T(\hat{X},\hat{Y}) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (1 - \hat{X} - \hat{Y}) \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \hat{X} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \hat{Y} \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

La restriction d'une fonction de base W_{M_k} à T_i sera alors égale à $\hat{P}_j \circ F_{T_i}^{-1}$ où M_k est le $j^{ème}$ point du $i^{ème}$ triangle.

Remarque :

Toutes les intégrations intervenant dans la formulation faible seront faites sur le triangle de référence, en effet on a :

$$\int_T W_M(X,Y)\,dX\,dY = \int_T (\hat{P} \circ F_T^{-1})\,dX\,dY = \int_{\hat{T}} \hat{P}(\hat{X},\hat{Y})\, J(F_T)\, d\hat{X}\, d\hat{Y}$$

où $J(F_T)$ désigne le jacobien de F_T $\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \hat{X}} & \frac{\partial X}{\partial \hat{Y}} \\ \frac{\partial Y}{\partial \hat{X}} & \frac{\partial Y}{\partial \hat{Y}} \end{vmatrix}$

On utilisera d'autre part une formule d'intégration numérique exacte pour les polynômes de degré ≤ 2

par $\int_T f(\hat{X},\hat{Y})\,d\hat{X}\,d\hat{Y} = \frac{1}{6}\,(f(\hat{a}_{12}) + f(\hat{a}_{13}) + f(\hat{a}_{23}))$

$\hat{a}_{12} = (\frac{1}{2},0)$
$\hat{a}_{13} = (0,\frac{1}{2})$
$\hat{a}_{23} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Pour les intégrations sur le bord, on utilisera une formule à deux points

$$\int_{\overset{\frown}{a_1\ a_2}} f(s)\,ds = \int_0^1 f(Y,o)dX = \frac{1}{2}\,(f(\alpha,o) + f(1-\alpha,o))$$

avec $\alpha = 0.211324865405$

c) Approximation P_2

Le triangle $\hat{T}$ est toujours le triangle $\hat{a}_1 = (o,o)$ $\hat{a}_2 = (1,o)$ $\hat{a}_3 = (o,1)$ on prend $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_1\ \hat{a}_2\ \hat{a}_3\ \hat{a}_{12}\ \hat{a}_{13}\ \hat{a}_{23}\}$ $\hat{a}_{ij}$ désignant le milieu de $\hat{a}_i\ \hat{a}_j$.

$\hat{\Sigma}$ est alors P_2 - unisolvent P_2 désignant l'espace des polynômes sur $\hat{T}$ de degré inférieur ou égal à 2.

On se donne de plus les applications $\{F_{T_i}\}_{i=1}^{J(h)}$ polynômiales de degré ≤ 2 de $\hat{T}$ dans $\overline{\Omega}$.

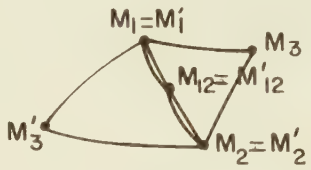
Les T_i de la triangulation seront donc les images par les F_{T_i} de $\hat{T}$ concrètement pour définir F_T on se donnera un ensemble Σ de $\overline{\Omega}$.

de telle sorte que Σ soit équivalent à $\hat{\Sigma}$ (c'est-à-dire que F_T est inversible) (RAVIART [1]).

Soit $\Sigma = \{M_1, M_2, M_3, M_{12}, M_{13}, M_{23}\}$ alors F_T sera définie par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F_T(\hat{X},\hat{Y}) = (1-\hat{X}-\hat{Y})(1-2\hat{X}-2\hat{Y})\,M_1 + \hat{X}(2\hat{X}-1)\,M_2 + \hat{Y}(2\hat{Y}-1)\,M_3$$
$$+ 4(1-\hat{X}-\hat{Y})\,\hat{X}\,M_{12} + 4(1-\hat{X}-\hat{Y})\,M_{13} + 4\,\hat{X}\,\hat{Y}\,M_{23}$$

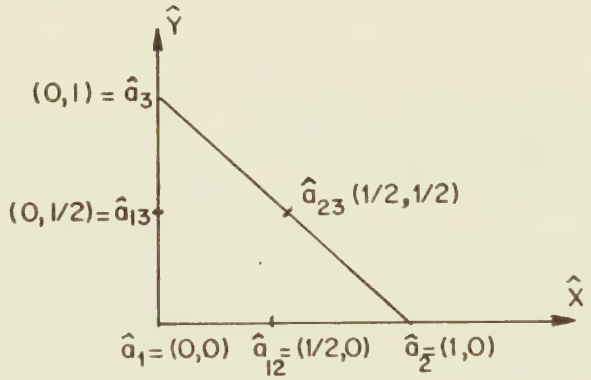
D'autre part si T_i et T_j sont deux triangles distincts d'intersection non vide ils auront alors en commun soit un sommet, soit un côté tout entier. On vérifie en effet facilement que la situation suivante est impossible :



Fonctions de base

Soit $\{M_k\}_{k=1}^{N(h)}$ les images de $\hat{\Sigma}$ par les applications $\{F_{T_i}\}_{i=1}^{I(h)}$ on définit alors une base de $\mathcal{V}_h$ $\{W_{M_k}\}_{k=1}^{N(h)}$ comme suit : considérons les fonctions de base suivantes de P_2 :

$$\hat{P}_1 = (1-\hat{X}-\hat{Y})(1-2\hat{X}-2\hat{Y})$$
$$\hat{P}_2 = \hat{X}(2\hat{X}-1)$$
$$\hat{P}_3 = \hat{Y}(2\hat{Y}-1)$$
$$\hat{P}_{12} = 4\,\hat{X}(1-\hat{X}-\hat{Y})$$
$$\hat{P}_{13} = 4\,\hat{Y}(1-\hat{X}-\hat{Y})$$
$$\hat{P}_{23} = 4\,\hat{X}\,\hat{Y}$$



L'indice k représentant soit i, soit ij on définit W_{M_k} par $W_{M_k}(M_{k'}) = \delta_{kk'}$.

La restriction de W_{M_k} à T_ℓ vaut $\begin{cases} 0 & \text{si } M_k \notin T_\ell \\ \hat{P}_k \circ F_{T_\ell}^{-1} & \text{si } M_k \in T_\ell \end{cases}$

Intégrations

Comme pour l'approximation P_1 nous utiliserons une formule d'intégration numérique ; toutes les intégrations étant faites sur le triangle de référence $\hat{T}$.

Pour les intégrations de bord on utilise la formule suivante :

$$\int_{\overset{\frown}{a_1 a_2}} f(s)\, ds = \int_0^1 f(X,o)\, dX \simeq \frac{5}{18} (f(\alpha) + f(1-\alpha)) + \frac{4}{9} f(\tfrac{1}{2})$$

avec $\alpha = 0.112701665379$.

Pour les intégrations de domaine on utilise la formule :

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{X},\hat{Y})\, d\hat{X}\, d\hat{Y} \simeq \frac{1}{120} \left[3 (f(\hat{a}_1) + f(\hat{a}_2) + f(\hat{a}_3) + 8 (f(\hat{a}_{12}) + f(\hat{a}_{23}) + f(\hat{a}_{13})) + 27 f(\hat{a}_{123}) \right]$$

avec $a_{123} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Cette intégration étant exacte pour les polynômes de degré 6.

Remarque :

Alors que pour l'approximation P_1 l'intégration numérique n'introduisait aucune erreur supplémentaire, les $\hat{P} \circ F_T^{-1}$ étant polynômiales, il en est différemment pour l'approximation P_2 car en général $F_T^{-1}(X,Y)$ n'est pas un polynôme. Il y aura donc intérêt numériquement à n'utiliser les côtés courbes que pour les cas indispensables, c'est-à-dire pour l'approximation de certaines frontières.

Résultats numériques

On considère un test monodimensionnel qui a servi à tester au L.N.H. les différents schémas pour cette équation :

$$\Omega =]\,0,0.5\,[\,X\,]\,0,0.025\,[$$

l'équation est :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\,(x,y,t)\,\frac{\partial f}{\partial x} + v(x,y,t)\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

avec $u(x,y,t) = u(x,t) = \pi a \left(\frac{1 - 2X}{1 - 2a \sin \pi t}\right) \cos \pi t \qquad 0 < a < \frac{1}{2}$

$$v(x,y,t) = 0$$

$$f(x,o) = 3 \sin \pi x$$

$$f(o,t) = 3 \sin \left(\frac{4 \pi a \sin \pi t}{1-2 a \sin \pi t}\right)$$

$$f(o.5,t) = 0$$

la solution est alors $f(x,t) = 3 \sin \left(4\pi \frac{x - a \sin \pi t}{1-2 a \sin \pi t}\right)$

On prend $a = 1/4$.

Le pas d'espace (distance entre deux points de discrétisation) a été choisi égal à 0.025, le pas en temps étant DT = 1.5/41, le maillage en P1 est donc :

et le maillage P2 est :

Les figures suivantes permettent de comparer les résultats des approximations P1 et P2, le pas en temps est DT = 1.5/41, le paramètre du schéma 1/2.

On constate que le schéma est très sensible au choix du paramètre λ. Le schéma devenant très amortissant quand λ croît et instable quand λ est inférieur à 1/2. On donne quelques résultats pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 0.75$ en approximation P2.

Les résultats montrent que l'approximation P2 est plus régularisante que l'approximation P1.

Des essais ont été effectués en "distordant" le maillage et l'orientation des triangles n'a pas d'influence sur les résultats.

Approximation P2 DT = 1,5/41 $\lambda = 0,5$

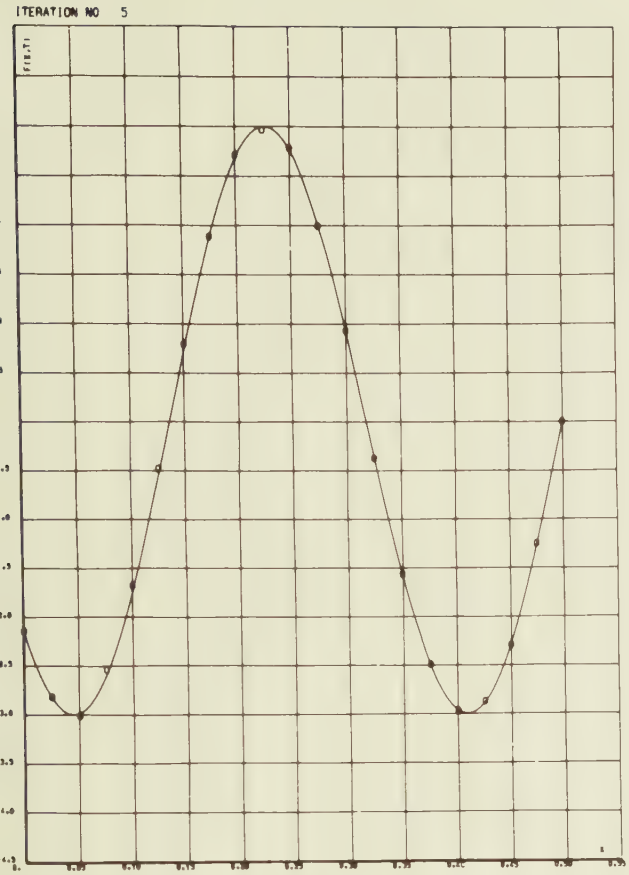


fig_1

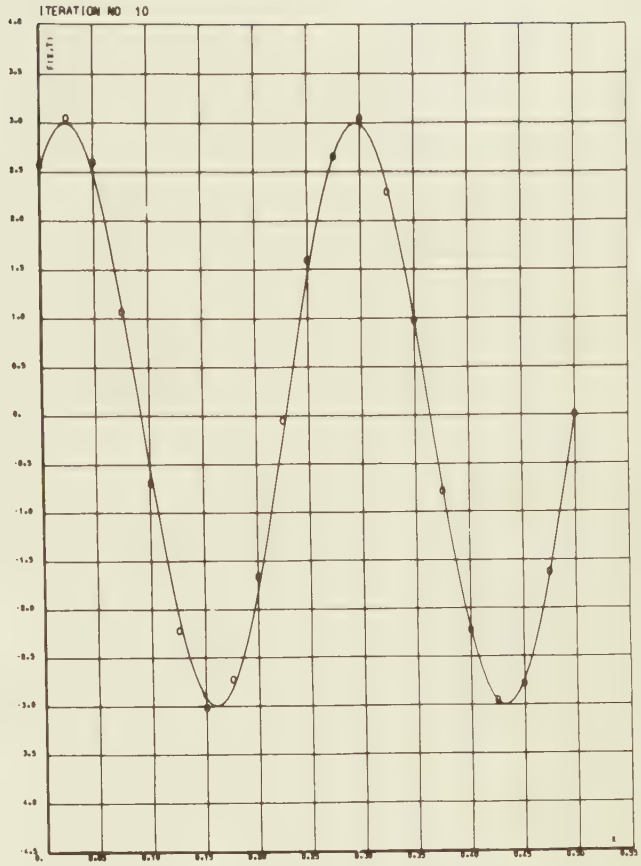
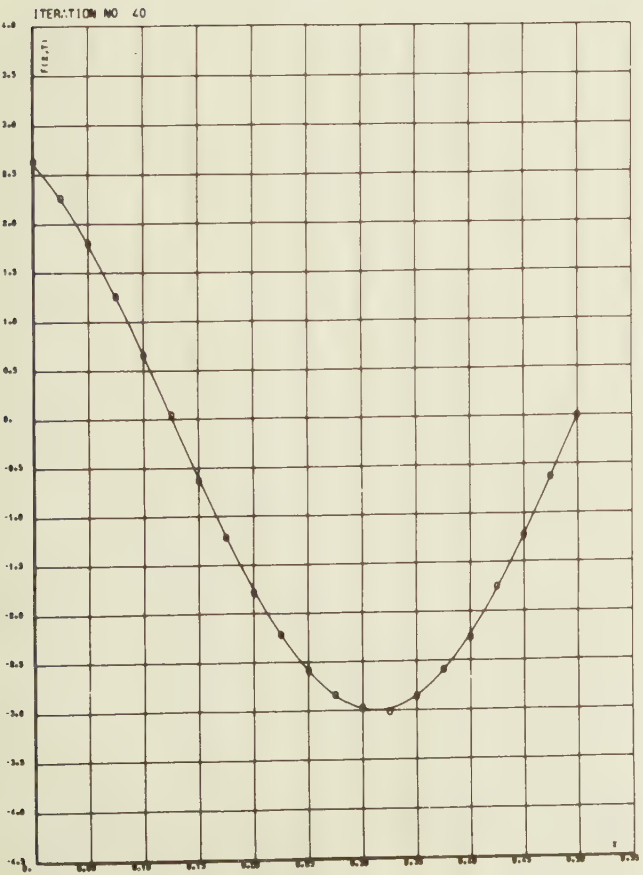
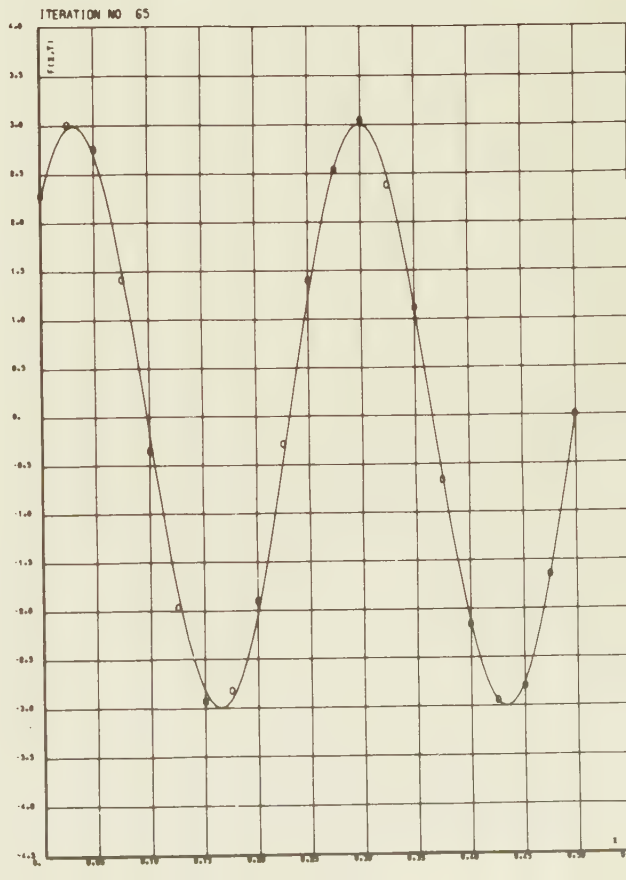


fig_2





Approximation P1 DT = 1,5/41 λ = 0,5

fig.5

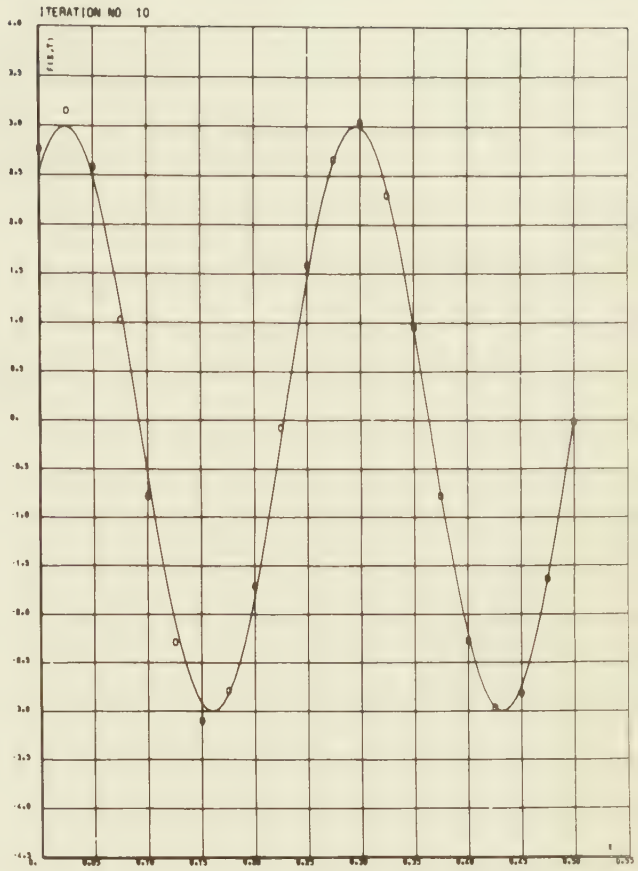
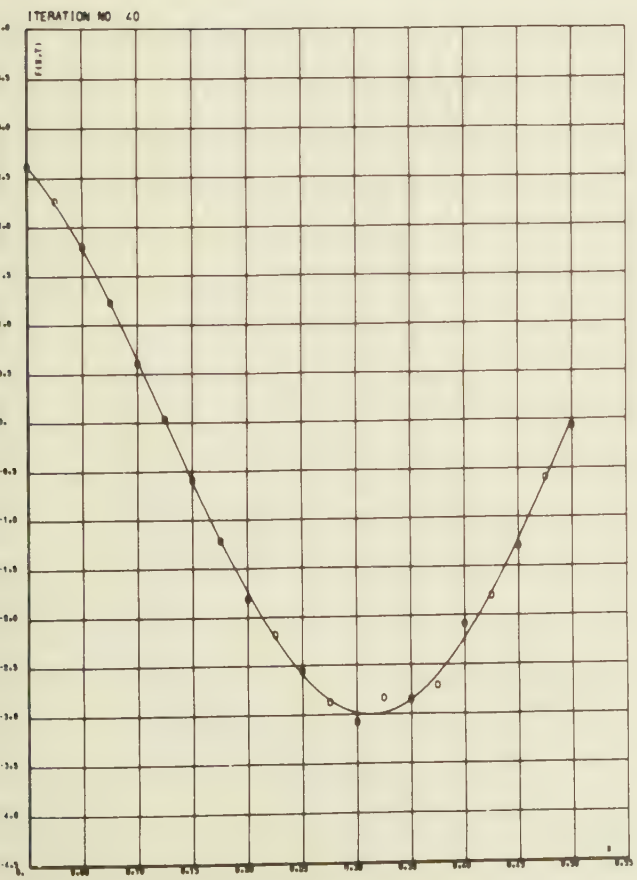
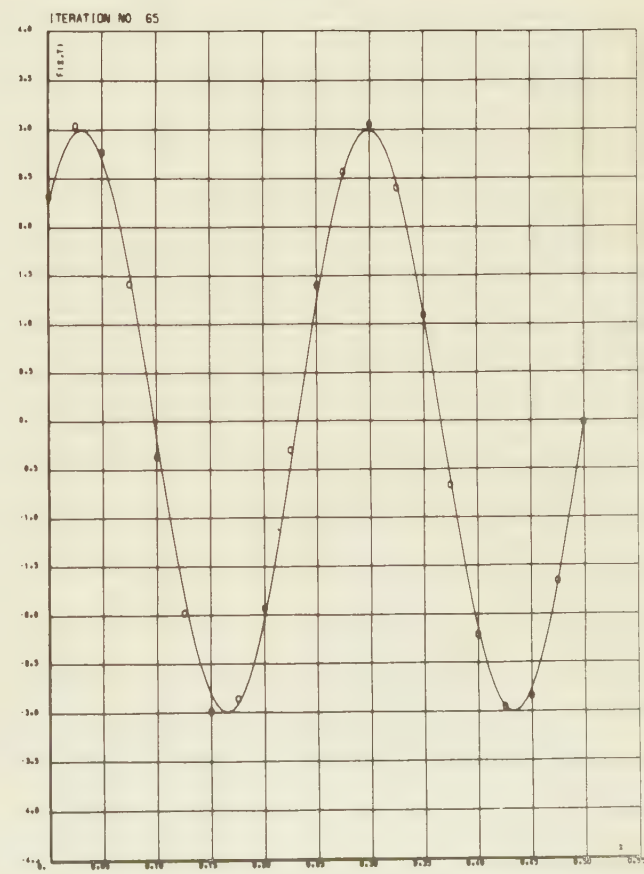


fig.6





Approximation P2 DT= 1,5/41 λ= 0,75

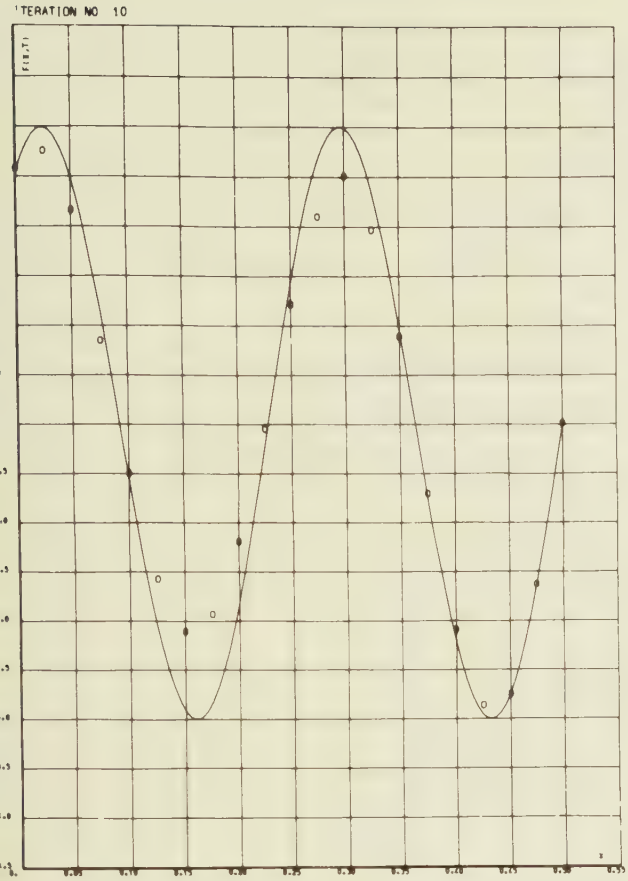


fig_9

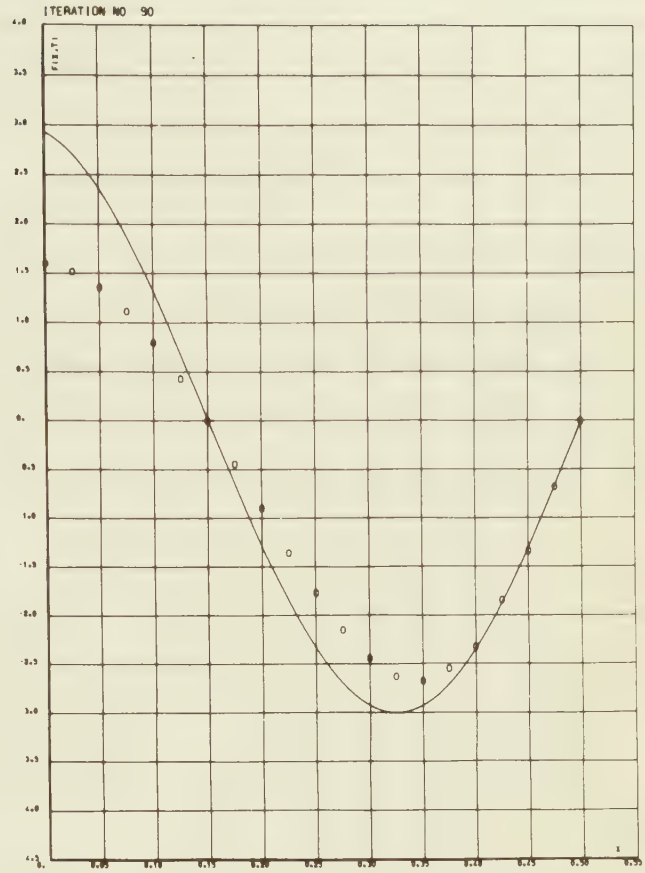
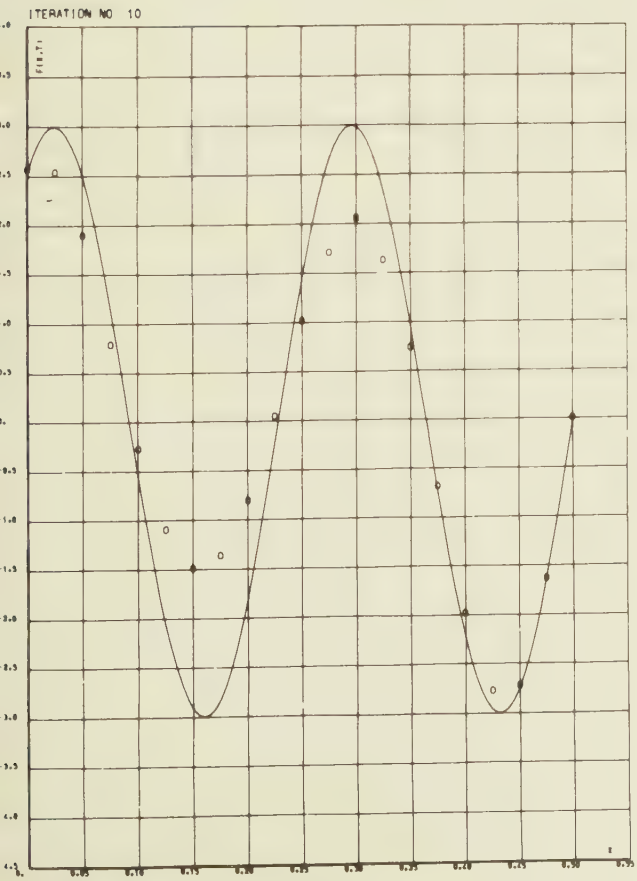


fig_10

Approximation P2 DT= 1,5/41 λ= 1



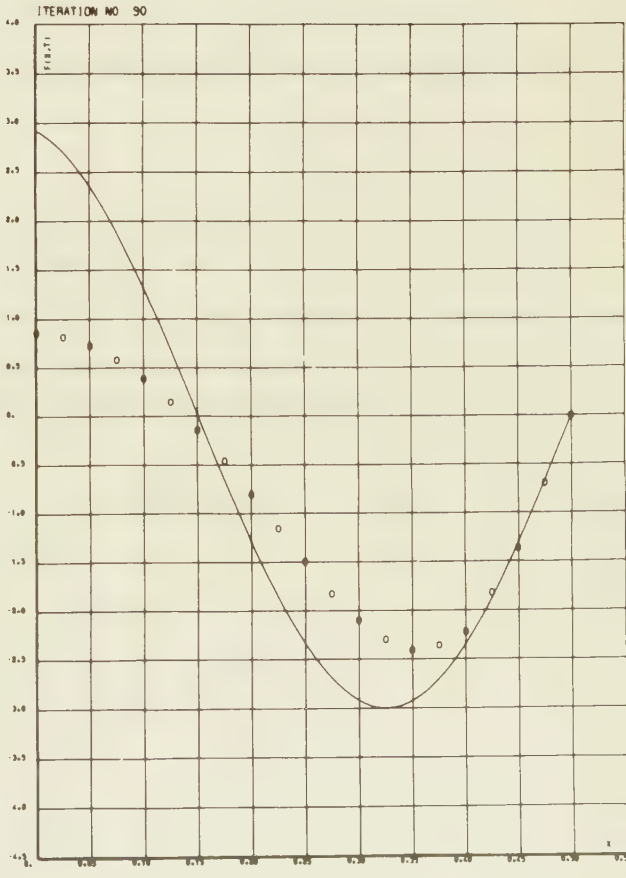


fig 12

CHAPITRE IV - L'EQUATION DE PROPAGATION

1 - FORMULATION

La résolution de l'opérateur de propagation intervenant dans le chapitre (I) est semblable à la résolution de l'équation des ondes non linéaires suivante :

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + gH \dfrac{\partial H}{\partial x} + gH \dfrac{\partial Z_f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + gH \dfrac{\partial H}{\partial y} + gH \dfrac{\partial Z_f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

avec $U = \overline{u}\, H$, $V = \overline{v}\, H$, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ désignant la vitesse moyenne du fluide sur une verticale.

Z_f est la cote du fond donnée et supposée suffisamment régulière, g est l'accélération de la pesanteur.

Cette équation (I) est d'ailleurs utilisée pour la détermination des courants marins loin des côtes.

On cherchera donc une solution de (I) dans $\Omega \times [0,T]$ Ω étant ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^2$, Γ sa frontière.

Pour que le problème soit bien posé, il faut imposer à la limite une relation entre H U et V , on prendra cette relation de la forme

$\alpha U + \beta V + \gamma H = \delta$.

$\alpha\ \beta\ \gamma$ étant des applications continues de $\Gamma \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$.

Formulation

On suppose que l'équation (I) admet une solution dans $\mathcal{C}([0,T];H^1(\Omega$ alors pour cette solution $\begin{pmatrix} H \\ U \\ V \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial H}{\partial t}\mathcal{H} + \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial x}\mathcal{H} + \int_\Omega \frac{\partial V}{\partial y}\mathcal{H} = 0 \\ \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t}\mathcal{U} + \int_\Omega gH\frac{\partial U}{\partial x}\mathcal{U} + \int_\Omega gH\frac{\partial Z_f}{\partial x}\mathcal{U} = 0 \\ \int_\Omega \frac{\partial V}{\partial t}\mathcal{V} + \int_\Omega gH\frac{\partial V}{\partial y}\mathcal{V} + \int_\Omega gH\frac{\partial Z_f}{\partial y}\mathcal{V} = 0 \end{cases}$$

pour tout $(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{V}) \in (H^1(\Omega))^3$ et pour tout $t \in [0,T]$. A priori pour H et $\mathcal{U}$ dans $H^1(\Omega)$ l'intégrale $\int_\Omega H\frac{\partial H}{\partial x}\mathcal{U}$ n'est pas définie mais d'après les théorèmes d'inclusion de Sobolev si Ω est un ouvert borné suffisamment régulier de $\mathbb{R}^2$ alors $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour $1 \le q < +\infty$ donc en particulier $H^1 \subset L^4(\Omega)$, donc $H\mathcal{U} \in L^2(\Omega)$.

2 - SEMI-DISCRETISATION EN TEMPS

Le segment $[0,T]$ est divisé en N intervalles de longueur $DT = \frac{T}{N}$. λ désigne un paramètre réel compris entre 0 et 1.

On pose $f^n = f(n\,DT)$

(H^0, U^0, V^0) .... (H^n, U^n, V^n) étant connus, on détermine $(H^{n+1}, U^{n+1}, V^{n+1})$ par :

$$(II)\quad \begin{cases} \frac{1}{DT}\int_\Omega H^{n+1}\mathcal{H} + \lambda\int_\Omega (\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{n+1}}{\partial y})\mathcal{H} = \frac{1}{DT}\int_\Omega H^n\mathcal{H} + (\lambda-1)\int_\Omega (\frac{\partial U^n}{\partial x} + \frac{\partial V^n}{\partial y})\mathcal{H} \\ \frac{1}{DT}\int_\Omega U^{n+1}\mathcal{U} + \lambda g\int_\Omega H^n\frac{\partial H^{n+1}}{\partial x}\mathcal{U} = \frac{1}{DT}\int_\Omega U^n\mathcal{U} + (\lambda-1)\int_\Omega H^n\frac{\partial H^n}{\partial x}\mathcal{U} - g\int_\Omega H^n\frac{\partial Z_f}{\partial x}\mathcal{U} \\ \frac{1}{DT}\int_\Omega V^{n+1}\mathcal{V} + \lambda g\int_\Omega H^n\frac{\partial H^{n+1}}{\partial y}\mathcal{V} = \frac{1}{DT}\int_\Omega V^n\mathcal{V} + (\lambda-1)\int_\Omega H^n\frac{\partial H^n}{\partial y}\mathcal{V} - g\int_\Omega H^n\frac{\partial Z_f}{\partial y}\mathcal{V} \end{cases}$$

pour tout $(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{V}) \in (H^1(\Omega))^3$

avec $\alpha^{n+1} U^{n+1} + \beta^{n+1} V^{n+1} + \gamma^{n+1} H^{n+1} = \delta^{n+1}$ sur Γ .

3 - APPROXIMATION EN ELEMENTS FINIS

V_h désigne une approximation de $H^1(\Omega)$ définie précédemment c'est-à-dire V_h est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}_h$ polynômiales sur chaque triangle les polynômes étant de degré 1 ou 2.

On désigne par $\left\{ W_i \right\}_{i=1}^{N(h)} = \left\{ W_{M_i} \right\}_1^{N(h)}$ la base définie au chapitre I.

La discrétisation du système (II) est donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{DT} \sum_{i=1}^{N(h)} (W_i,W_j)\, H_i + \lambda \sum_{i=1}^{N(h)} (\frac{\partial W_i}{\partial x}, W_j)\, U_i + \lambda \sum_{i=1}^{N(h)} (\frac{\partial W_i}{\partial y}, W_j)\, V_i = (F_1,W_j) & (1) \\ \lambda g \sum_{i=1}^{N(h)} (H^n \frac{\partial W_i}{\partial x}, W_j)\, H_i + \frac{1}{DT} \sum_{i=1}^{N(h)} (W_i,W_j)\, U_i + 0 = (F_2,W_j) & (2) \\ \lambda g \sum_{i=1}^{N(h)} (H^n \frac{\partial W_i}{\partial y}, W_j)\, H_i + 0 + \frac{1}{DT} \sum_{i=1}^{N(h)} (W_i,W_j) V_i = (F_3,W_j) & (3) \end{cases}$$

Ceci pour tout $j \in [1, N(h)]$ (f_i, g_j) désignant $\int_{\Omega_h} f_i\, g_j$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites n'entrant pas de façon naturelle dans la formulation on les introduit dans le système linéaire précédent de la façon suivante :

En un point M_j du bord, on remplace une des équations (1), (2) ou (3) par la relation :

$$\alpha^{n+1} U^j + \beta^{n+1} V^j + \gamma^{n+1} H^j = \delta^{n+1}$$

l'équation enlevée étant :

$$\text{1'équation (1)} \quad \text{si} \quad \left|\gamma^{n+1}\right| = M$$

$$\text{1'équation (2)} \quad \text{si} \quad \left|\alpha^{n+1}\right| = M$$

$$\text{1'équation (3)} \quad \text{si} \quad \left|\beta^{n+1}\right| = M$$

avec $M = \text{Sup}\left(\left|\alpha^{n+1}\right|, \left|\beta^{n+1}\right|, \left|\gamma^{n+1}\right|\right)$

Exemples numériques

Nous avons d'abord effectué un test unidimensionnel fait pour tester un programme d'éléments finis élaboré par le M.I.T.

Si la variation de surface libre est faible devant la hauteur d'eau en posant $C^2 = g\,H_o$ et en posant $\eta = H - H_o$ où H_o est la hauteur d'eau au repos, on ramène l'équation non linéaire de St Venant (propagation seule) à l'équation des ondes classiques pour un écoulement unidimensionnel :

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = C^2 \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{cases}$$

On considère donc un canal de longueur L, les conditions aux limites imposées étant :

$$\begin{cases} \eta_{X=0} = a \sin \omega_f t \\[2ex] u_{X=L} = 0 \end{cases}$$

a est l'amplitude de l'oscillation forcée du niveau d'eau

la solution analytique de l'équation (I) est alors :

$$\begin{cases} u = -\dfrac{a\sqrt{g\,h_o}}{h_o \cos \omega_f \dfrac{L}{\sqrt{g\,h_o}}} \sin\left\{\omega_f \dfrac{L}{\sqrt{g\,h_o}} \left(\dfrac{X}{L} - 1\right)\right\} \cos \omega_f t \\ \eta = \dfrac{a}{\cos \omega_f \dfrac{L}{\sqrt{g\,h_o}}} \cos\left\{\omega_f \dfrac{L}{\sqrt{g\,h_o}} \left(\dfrac{X}{L} - 1\right)\right\} \sin \omega_f t \end{cases}$$

Pour une faible valeur du rapport $\frac{a}{h_o}$ on peut considérer que les effets non linéaires sont négligeables et on a donc comparé la solution calculée à la solution exacte du problème linéarisé.

On se donne :

$L = 200$ m

$h_o = 4$ m

$\omega_f = \frac{2\pi}{T} = 0.0314150\ s^{-1}$

$T = 200$ s

$a = 0.1$ m

$g = 9{,}81\ m/s^2$

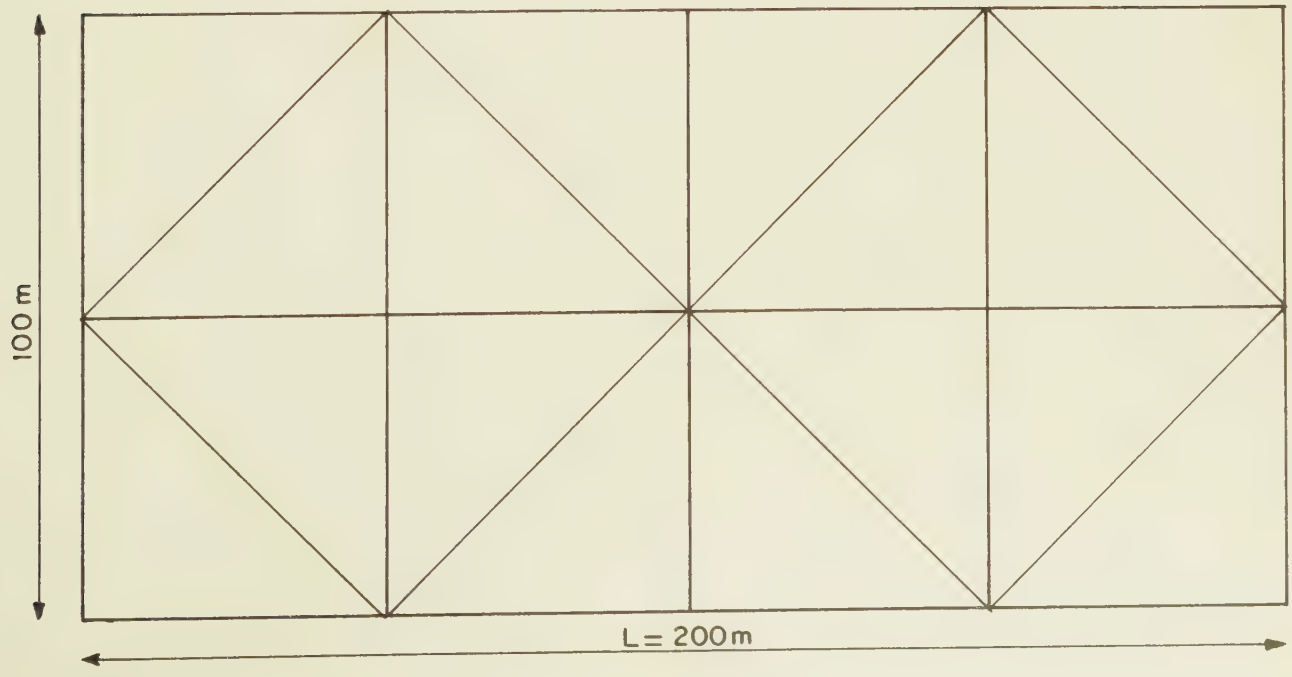
$\Delta x = 50$ m

$\Delta y = 50$ m

$\Delta t = 5$ s

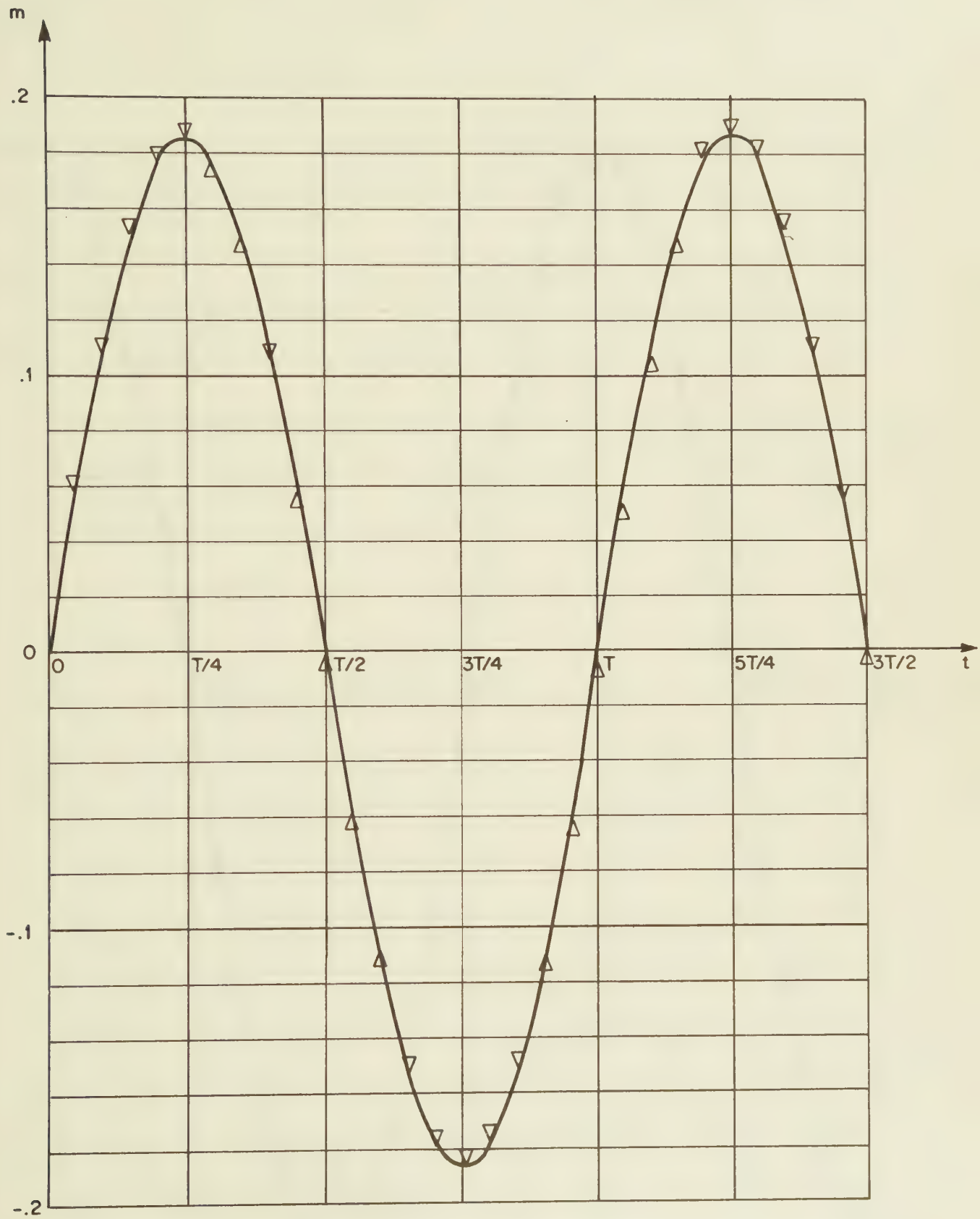
la vitesse moyenne de propagation $C = \sqrt{g\,h_o}$ vaut 6.26 m/s.

Approximation P2

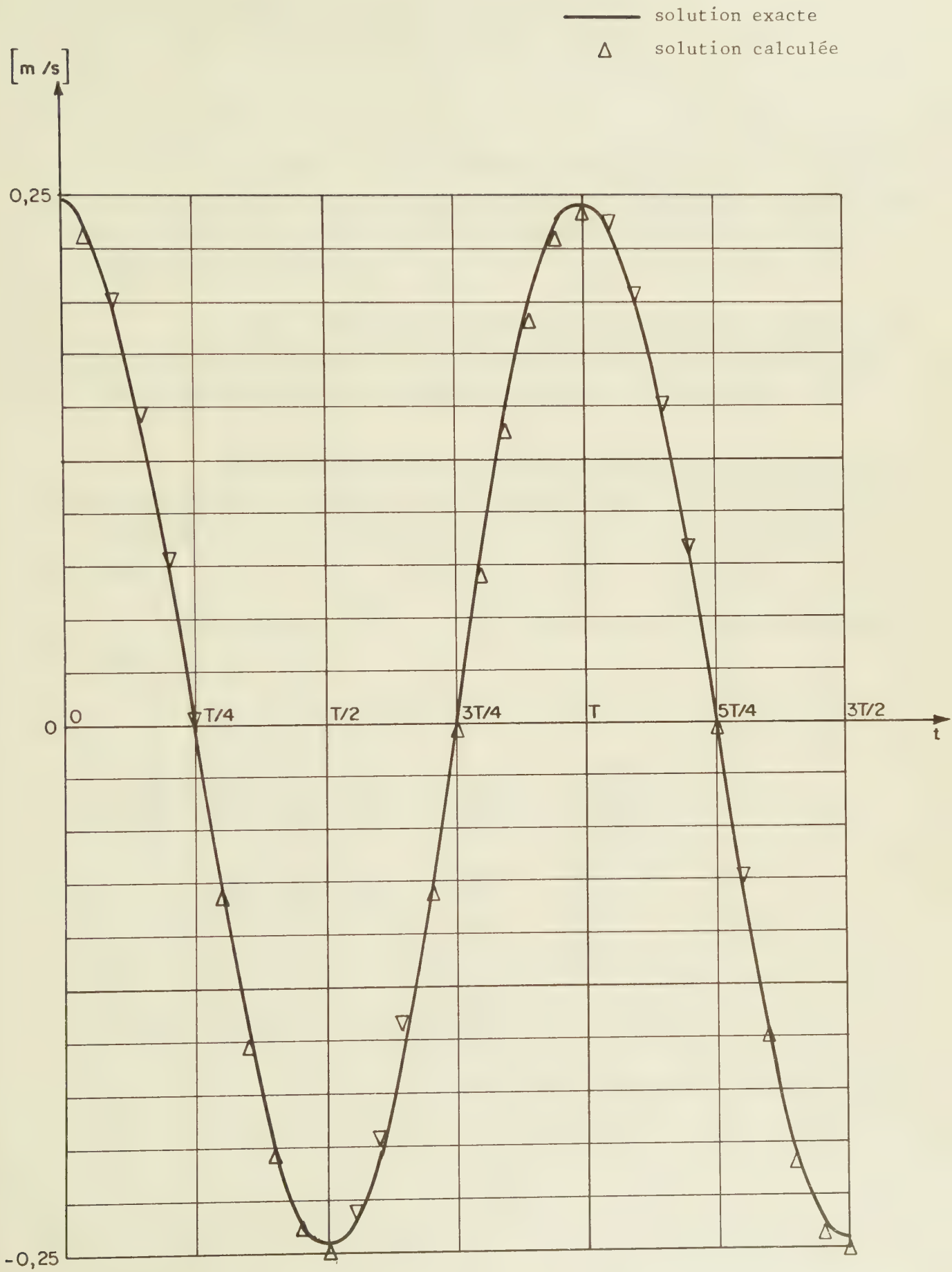


Les courbes suivantes représentent la variation de hauteur en fonction du temps à la sortie du canal (X = L) et la vitesse en fonction du temps (ou le débit) à l'entrée du canal (X = 0).

Elévation de la surface libre à X = L



vitesse à X = 0


solution exacte
solution calculée
[m /s]
0,25
0
-0,25
0
T/4
T/2
3T/4
T
5T/4
3T/2
t

CHAPITRE V - L'EQUATION DE SAINT-VENANT

Par analogie avec les programmes existant déjà en différences finies, nous avons pensé, au début de notre travail, résoudre cette équation par une méthode à pas fractionnaires mettant en évidence les opérateurs élémentaires précédents.

Il s'est avéré par la suite que cette méthode ne s'imposait peut-être pas aussi évidemment qu'en différences finies. C'est pourquoi nous avons tenté une résolution numérique directe de cette équation.

Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$, Γ sa frontière. Dans un premier temps on néglige la diffusion ainsi que la variation de pression atmosphérique et la contrainte due au vent (l'introduction de ces deux derniers termes ne pose d'ailleurs aucun problème supplémentaire).

En posant $U = \bar{u}\, h$ $V = \bar{v}\, h$ les équations décrites au chapitre I s'écrivent :

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}\, U}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}\, U}{\partial y} + gh \dfrac{\partial Z}{\partial x} + g \dfrac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} - FV = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}\, V}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}\, V}{\partial y} + gh \dfrac{\partial Z}{\partial y} + g \dfrac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} + FU = 0 \end{cases}$$

avec $Z = h + Z_f$; Z_f cote du fond ; C coefficient de Chezy

$\begin{pmatrix} -FV \\ FU \end{pmatrix}$ désigne la force de Coriolis.

1 - LES CONDITIONS AUX LIMITES

Γ_1 désigne la frontière "solide" du domaine Γ .

On pose $\Gamma_2 = \Gamma_1 / \Gamma$

On impose $\vec{W}.\vec{n} = 0$ sur Γ_1 avec $\vec{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ une relation du type $\alpha U + \beta V + \gamma h = \delta$ sur Γ_2, une deuxième relation indépendante de la première du type $\alpha' U + \beta' V + \gamma' h = \delta'$ sur Γ_2^-, avec :

$$\Gamma_2^- = \left\{ M \in \Gamma_2 \;\middle|\; \vec{W}\,\vec{n} < 0 \right\}$$

2 - FORMULATION

On suppose qu'il existe une solution régulière du système (I) $(h,U,V) \in (C^1(\Omega \times [0,T]))^3$ avec $h > 0$ alors pour $(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{V}) \in (H^1(\Omega))^3$ et pour tout t , on a, en intégrant par parties dans la 1ère équation :

$$\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial t}\mathcal{H} + \int_{\Gamma_2} \vec{W}\,\vec{n}\,\mathcal{H} - \int_\Omega \vec{W} \cdot \vec{\text{grad}}\,\mathcal{H} = 0$$

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t}\mathcal{U} + \int_\Omega \left(\frac{\partial \bar{u}U}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}U}{\partial y} + gh\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{U\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 h^2} - FV\right)\mathcal{U} = 0$$

$$\int_\Omega \frac{\partial V}{\partial t}\mathcal{V} + \int_\Omega \left(\frac{\partial \bar{u}V}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}V}{\partial y} + gh\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{V\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 h^2} + FU\right)\mathcal{V} = 0$$

3 - SEMI-DISCRETISATION EN TEMPS

λ désigne un paramètre réel compris entre 0 et 1. L'intervalle $[0,T]$ est divisé en N intervalles de longueur $T/N = DT$, on pose $(h^n, U^n, V^n) = (h(nDT), U(nDT), V(nDT))$

$(h^o, U^o, V^o \ldots\ldots (h^n, U^n, V^n)$ étant connus on détermine $(h^{n+1}, U^{n+1}, V^{n+1})$ par :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{DT}\displaystyle\int_\Omega U^{n+1}\mathcal{H} + \lambda\int_{\Gamma_2} \vec{W}^{n+1}.\vec{n}\,\mathcal{H} - \lambda\int_\Omega \vec{W}^{n+1}\,\vec{\text{grad}}\mathcal{H} = (\lambda-1)\int_\Omega \text{div}\,\vec{W}^n\,\mathcal{H} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{DT}\displaystyle\int_\Omega h^n\,\mathcal{H} \\
\dfrac{1}{DT}\displaystyle\int_\Omega U^{n+1}\mathcal{U} + \lambda\int_\Omega (\bar{u}^n \dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \bar{v}^n \dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial y} + U^{n+1}(\dfrac{\partial \bar{u}^n}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}^n}{\partial y}) + g\,h^n \dfrac{\partial Z^{n+1}}{\partial x} \\
\qquad + \dfrac{U^{n+1}\sqrt{U^{n2}+V^{n2}}}{C^2\,h^{n2}} - FV^{n+1})\mathcal{U} = (\lambda-1)\displaystyle\int_\Omega (\dfrac{\partial \bar{u}^n U^n}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}^n U^n}{\partial y} + g\,h^n \dfrac{\partial Z^n}{\partial x} \\
\qquad + U^n \dfrac{\sqrt{U^{n2}+V^{n2}}}{C^2\,h^{n2}} - FV^n)\mathcal{U} + \dfrac{1}{DT}\displaystyle\int_\Omega U^n\,\mathcal{U} \\
\dfrac{1}{DT}\displaystyle\int_\Omega V^{n+1}\mathcal{V} + \lambda\int_\Omega (\bar{u}^n \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial x} + \bar{v}^n \dfrac{\partial V^{n+1}}{\partial y} + V^{n+1}(\dfrac{\partial \bar{u}^n}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}^n}{\partial y}) + g\,h^n \dfrac{\partial Z^{n+1}}{\partial y} \\
\qquad + \dfrac{V^{n+1}\sqrt{U^{n2}+V^{n2}}}{C^2\,h^{n2}} + FU^{n+1})\mathcal{V} = (\lambda-1)\displaystyle\int_\Omega (\dfrac{\partial \bar{u}^n V^n}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}^n V^n}{\partial y} + g\,h^n \dfrac{\partial Z^n}{\partial y} \\
\qquad + \dfrac{V^n\sqrt{U^{n2}+V^{n2}}}{C^2\,h^{n2}} + FU^n)\mathcal{V} + \dfrac{1}{DT}\displaystyle\int_\Omega V^n\,\mathcal{V}
\end{array}\right.$$

4 - APPROXIMATION EN ELEMENTS FINIS

On va chercher $(h^{n+1}, U^{n+1}, V^{n+1})$ dans $(H^1(\Omega))^3$ (la solution étant en fait plus régulière) l'approximation de $(H^1(\Omega))^3$ sera la même que celle utilisée pour l'opérateur de propagation, c'est-à-dire $\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ $\mathcal{V}_h$ étant l'espace des fonctions continues polynômiales sur chaque triangle d'une triangulation $(\mathcal{T}_k)_{k\in\mathcal{K}}$ tel qu'il a été défini au chapitre I (P_1 ou P_2).

Les conditions aux limites sur Γ_1 sont implicitement contenues dans la fonctionnelle, quant aux relations sur Γ_2 elles sont introduites directement par une discrétisation point par point analogue au traitement des conditions aux limites pour l'opérateur de propagation.

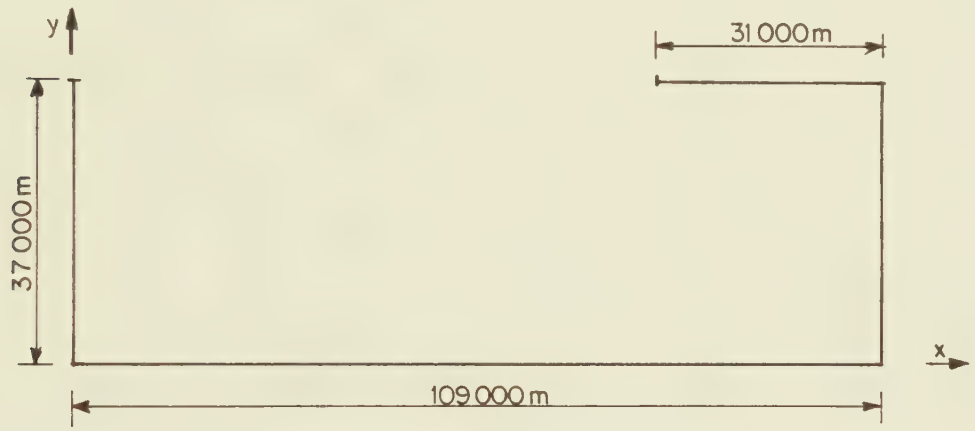
Résultats numériques

Nous avons appliqué la méthode précédente au calcul des courants de marée dans la baie du Massachussetts, la vitesse normale est nulle sur les frontières terrestres, la hauteur d'eau à l'entrée de la baie est imposée :

$$H = H_o + 1.31\ (1 - \cos \omega t)$$

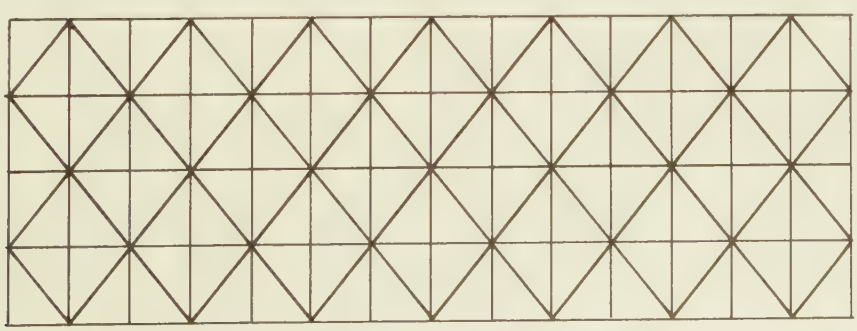
$H = 36{,}6$ m $\qquad \omega = 2\pi/T \qquad T = 44\ 640$ s $(= 12{,}4$ h$)$

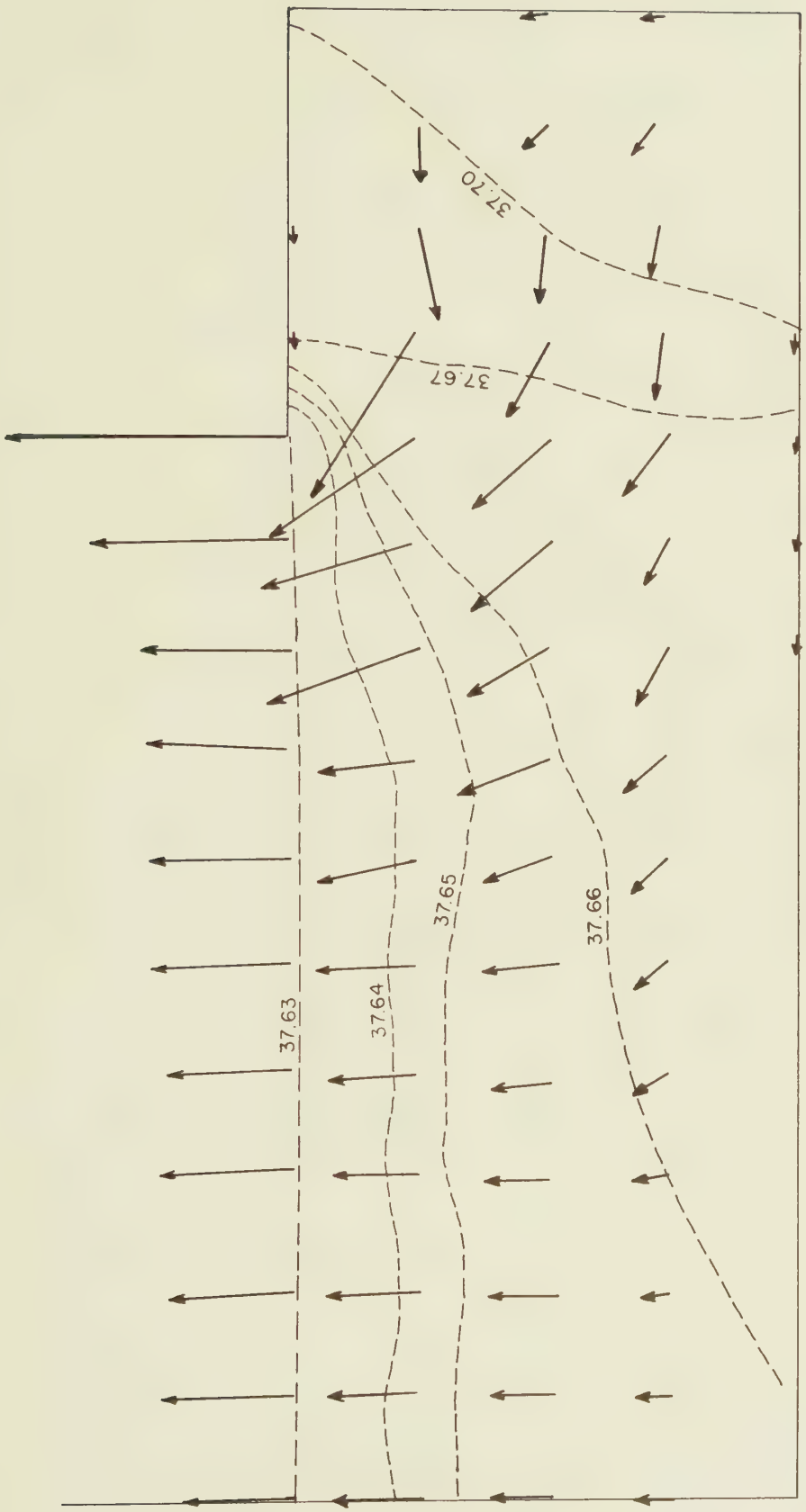
Quand le courant entre on impose en plus la vitesse tangentielle nulle



Le coefficient de Chezy est pris égal à 60, la force de Coriolis est négligée.

Les résultats présentés sont obtenus avec l'approximation P1 ; le maillage est le suivant :



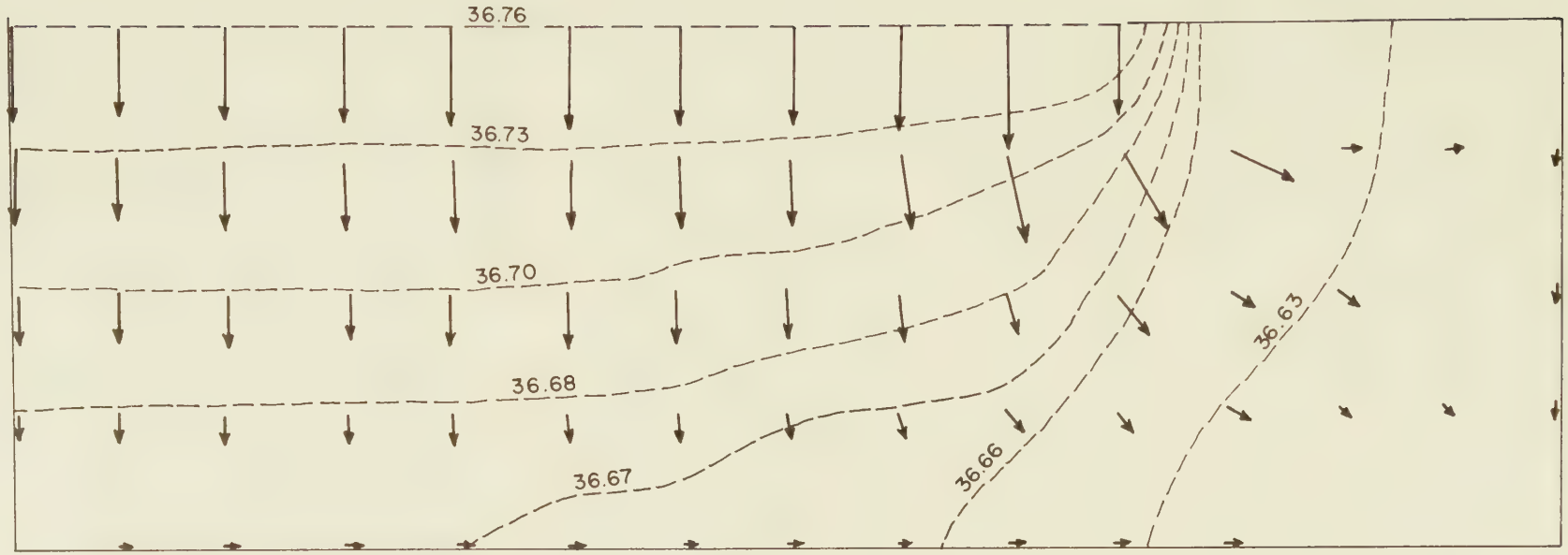


35 000 s (175 itérations)

lignes de niveau de la surface libre

25 cm/s $\Delta T = 200$ s

48 200 s (241 itérations)



_ _ _ _ _ _ Lignes de niveau de la surface libre

10 cm/s ΔT = 200 s

CHAPITRE VI - L'EQUATION DE DIFFUSION

Dans la méthode à pas fractionnaires définie au chapitre (I), l'opérateur de diffusion se traite numériquement de la même façon que le problème de Stokes discrétisé au premier ordre en temps. Le problème de Stokes (homogène) s'écrit :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{U} + \dfrac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}\, P = f \\ \text{div}\, \vec{U} = 0 \\ \vec{U}_{|\Gamma} = 0 \\ \vec{U}(o) = \vec{U}_o \end{cases}$$

De nombreuses études théoriques ont été faites sur ce problème. D'un point de vue numérique le traitement de la contrainte $\text{div}\, \vec{U} = 0$ apparaît comme la difficulté majeure. Elle conduit la plupart du temps à la mise en oeuvre de méthodes itératives qui s'avèrent donc très lourdes pour les problèmes d'évolution. Nous avons donc tenté une résolution directe avec à chaque pas en temps la détermination de la vitesse $\vec{U}$ et de la pression P.

1 - FORMULATIONS VARIATIONNELLES

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, Γ sa frontière, T un réel positif. On pose :

$$H_o^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \; ; \; u_{|\Gamma} = 0 \right\}$$

$$V = \left\{ \vec{U} \in H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega) \; ; \; \text{div}\, \vec{U} = 0 \right\}$$

$$L^2(0,T \; ; \; X) = \left\{ W : [0,T] \to X \; ; \; \int_o^T \| W(t) \|_X^2 \, dt < +\infty \right\}$$

Une formulation du problème (1) est alors : trouver $\vec{U}$ dans $L^2(0,T,V)$ tel que pour tout $\vec{V} \in V$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \vec{V} + \nu \int_\Omega \vec{\nabla} \vec{U} \vec{\nabla} \vec{V} = \int_\Omega f \vec{V} \\ \vec{U}(o) = \vec{U}_o \end{cases}$$

On démontre alors l'existence et l'unicité d'une solution de (2) (et par là même de (1)) (cf. R. TEMAM). De plus des résultats de régularité sont obtenus en fonction de la régularité de f de $\vec{U}_o$ et de Γ.

Pour pouvoir utiliser cette formulation numériquement il faut donc construire une approximation interne stable et convergente de V. Or il s'avère difficile de construire des fonctions à support "faible" et à divergence nulle (le support faible conduit à des matrices de discrétisation creuse et cette condition est pratiquement une obligation pour pouvoir traiter des problèmes de "grande taille"). On peut signaler une construction d'une telle approximation par Crouzeix.

On utilise alors une autre formulation, à savoir :

trouver $\vec{U} \in L^2(0,T,H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega))$ $P \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \vec{V} + \nu \int_\Omega \vec{\nabla} \vec{U} \vec{\nabla} \vec{V} = \int_\Omega \vec{f} \vec{V} + \frac{1}{\rho} P \operatorname{div} \vec{V} \\ \operatorname{div} \vec{U} = 0 \end{cases}$$

On peut alors discrétiser le problème en considérant une approximation de $H_o^1 \times H_o^1$ et en imposant une condition de "divergence discrète" nulle (cf. FORTIN , JAMET-RAVIART), on utilise alors des algorithmes pour la détermination du couple $\vec{U}$ P tels que l'algorithme d'Uzawa ou celui d'Arrow Hurwicz.

Nous utiliserons ici une autre formulation, à savoir :

trouver $\vec{U} \in L^2(0,T ; H_o^1 \times H_o^1)$ $P \in L^2(0,T ; L^2(\Omega)/R)$ tels que :

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \vec{V} + \nu \int_\Omega \vec{\nabla}\vec{U}\,\vec{\nabla}\vec{V} = \int_\Omega f \vec{V} + \frac{1}{\rho}\int_\Omega P \operatorname{div} \vec{V} \\ \int_\Omega \operatorname{div} \vec{U}\, \pi = 0 \qquad \forall (V,\pi) \in H_o^1 \times H_o^1 \times (L^2(\Omega)/R) \\ \vec{U}(o) = \vec{U}_o \end{cases}$$

2 - SEMI-DISCRETISATION EN TEMPS

On pose $DT = T/N$ $t_n = nDT$ $\vec{U}^n = \vec{U}(t_n)$

$\vec{U}^o$ ..... $\vec{U}^n$ étant déterminés, on calcule alors $\vec{U}^{n+1}$ P^{n+1} par :

$$\begin{cases} \frac{1}{DT}\int_\Omega \vec{U}^{n+1}\vec{V} + \nu\int_\Omega \vec{\nabla}\vec{U}^{n+1}\vec{\nabla}\vec{V} = \int_\Omega f\vec{V} + \frac{1}{\rho}\int_\Omega P^{n+1} \operatorname{div}\vec{V} + \frac{1}{DT}\int_\Omega \vec{U}^n \vec{V} \\ \int_\Omega \operatorname{div}\vec{U}^{n+1}\,\pi = 0 \qquad \forall (\vec{V},\pi) \in H_o^1 \times H_o^1 \times (L^2(\Omega)/R) \end{cases}$$

3 - APPROXIMATION EN ELEMENTS FINIS

On considère une triangulation $\mathcal{C}_h$ du domaine Ω "admissible" $\Omega(h) = \bigcup_{T \in \mathcal{C}_h} T$ les T étant des triangles "droits".

L'approximation de H_o^1 (pour les vitesses) sera faite par des éléments de degré 2 sur chaque triangle. C'est-à-dire l'approximation sera celle définie au chapitre II mais les fonctions (F_T) précédemment définies seront cette fois-ci toujours affines (éléments sous paramétriques).

La projection d'une fonction de H_o^1 sera alors définie sur chaque triangle par les valeurs de la fonction aux sommets et aux milieux des côtés du triangle.

Pour l'approximation de la pression nous utiliserons des fonctions linéaires sur chaque triangle (de la même triangulation), la pression sera

alors définie par ses valeurs aux sommets des triangles.

De plus la pression étant définie à une constante additive près ; on fixera la valeur de cette pression en un point.

Remarque :

L'approximation par des éléments finis de degré 1 conformes pour la pression est en principe incorrecte car elle impose plus de régularité à la pression que ne l'indique le cadre théorique.

En effet les éléments finis P1 définissent une approximation de $H^1(\Omega)$ et non de $L^2(\Omega)$.

En fait les résultats théoriques indiquent que pour :

$$f \in L^2(\Omega \times [0,T])$$

$$\vec{U}_o \in V$$

et pour Ω de classe $\mathcal{C}^2$ alors $P \in L^2(0,T ; H^1(\Omega))$.

Une autre approximation possible pour la pression serait d'utiliser des fonctions constantes par triangle mais il est à craindre alors que la contrainte div U = 0 soit numériquement peu respectée.

On désigne par :

N_S le nombre de sommets de triangles de $\mathcal{T}_h$ intérieurs au domaine Ω

N_M le nombre de points "milieux de côtés" intérieurs à Ω

N_P le nombre de sommets de triangles de $\mathcal{T}_h$ appartenant à $\overline{\Omega}$

$\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_S+N_M}$ désigne la base de l'approximation de $H_o^1(\Omega)$ pour la vitesse (éléments P2) définie par $\varphi_i(M_j) = \delta_{ij}$ $i,j = 1,N_S+N_M$

$\{\psi_i\}_{i=1}^{N_P}$ désigne la base de l'approximation de $H^1(\Omega)$ pour la pression (éléments P1) définie par $\psi_i(M_j) = \delta_{ij}$ $\quad i,j = 1, N_P$.

La discrétisation du problème de Stokes homogène s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N_S+N_M} U_i \int_{\Omega_h} \left(\frac{\varphi_i \varphi_j}{DT} + \nu \text{ grad } \varphi_i \text{ grad } \varphi_j\right) d\Omega_h - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \int_{\Omega_h} \psi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega_h \\ \qquad = \int_{\Omega_h} \left(f_X + \frac{U^n}{DT}\right) \varphi_j \, d\Omega_h \\ \sum_{i=1}^{N_S+N_M} V_i \int_{\Omega_h} \left(\frac{\varphi_i \varphi_j}{DT} + \nu \text{ grad } \varphi_i \text{ grad } \varphi_j\right) d\Omega_h - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N_P} P_i \int_{\Omega_h} \psi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega_h \\ \qquad = \int_{\Omega_h} \left(f_Y + \frac{V^n}{DT}\right) \varphi_j \, d\Omega_h \\ \sum_{i=1}^{N_S+N_M} U_i \int_{\Omega_h} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \psi_K \, d\Omega_h + \sum_{i=1}^{N_S+N_M} V_i \int_{\Omega_h} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \psi_K \, d\Omega_h = 0 \\ \text{pour } j = 1, N_S+N_M \text{ et } k = 1, N_P \end{cases}$$

U V désignent les composantes de la vitesse $\vec{U}$, on obtient donc un système linéaire de $(2(N_S+N_M) + N_P)$ équations. Ce système est de rang $\leq (2(N_S+N_M) + N_P - 1)$ la pression étant définie à une constante additive près.

Nous pouvons écrire ce système symboliquement :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & 0 & B_1 \\ \hline 0 & A_1 & B_2 \\ \hline {}^tB_1 & {}^tB_2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline U \\ \hline V \\ \hline P \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|} \hline S_1 \\ \hline S_2 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Remarques :

1°) La matrice A_1 est symétrique.

2°) Le couplage entre U et V ne se fait que par la relation de divergence. Cette relation s'écrit $\begin{bmatrix} -{}^t B_1 & -{}^t B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = 0$ et n'admet une solution non triviale $\begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}$ que si on a la relation $2\,(N_S + N_m) > N_P - 1$ (les relations de divergence discrétisées étant indépendantes).

Cette dernière condition impose une condition sur le nombre de points de discrétisation et donc sur le maillage.

On constate alors que pour un maillage suffisamment "fin" (c'est-à-dire pour un nombre de points de discrétisation suffisamment grand) cette relation est toujours vérifiée.

Test du programme et résultats numériques

Nous avons effectué deux tests numériques très simples pour la mise au point du programme.

Nous avons ensuite effectué un calcul dans un domaine rectangulaire représentant une "chicane" et pour lequel il a été effectué des mesures de vitesses au vélocimètre à laser (l'écoulement physique était réellement laminaire).

Enfin nous avons traité ce même exemple en rajoutant les termes non linéaires la formulation discrétisée en temps étant alors la suivante :

$\vec{U}^o$ $\vec{U}^n$ connus $\vec{U}^{n+1}$ $\vec{P}^{n+1}$ sont calculés par :

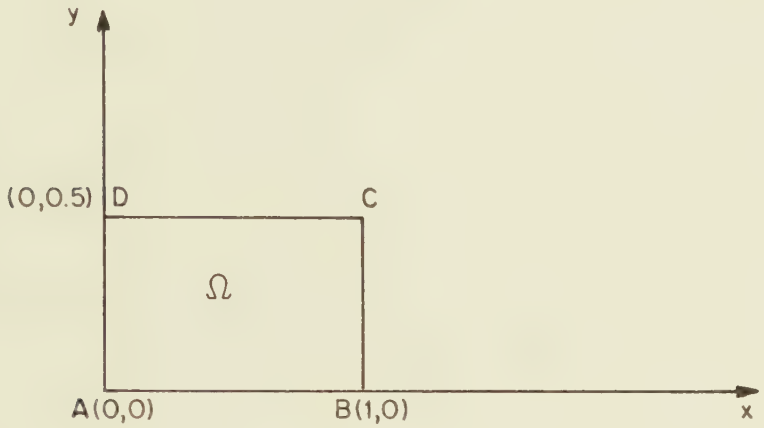
$$\frac{1}{DT}\int_\Omega \vec{U}^{n+1}\,\vec{V} + \nu\int_\Omega \nabla\vec{U}^{n+1}\nabla\vec{V} + \lambda\int_\Omega (\vec{U}^n\,.\,\vec{\nabla})\,\vec{U}^{n+1}\,.\,\vec{V} - \frac{1}{\rho}\int_\Omega P^{n+1}\,\mathrm{div}\,\vec{V}$$

$$= \int_\Omega f\,\vec{V} + \frac{1}{DT}\int_\Omega \vec{U}^n\,\vec{V} + (\lambda-1)\int_\Omega (\vec{U}^n.\vec{\nabla})\,\vec{U}^n\,\vec{V}$$

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{U}^{n+1}\,\pi = 0 \qquad \forall\,(\vec{V},\pi) \in H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

1er test

Il s'agit de calculer un écoulement monodimensionnel permanent (écoulement entre deux plaques), le domaine est le suivant :



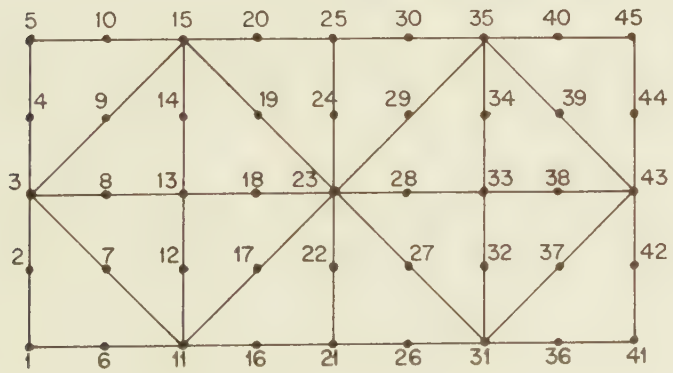
La viscosité cinématique ν et la masse volumique ρ sont égales à 1. On impose sur AB et DC $U = 0$ $V = 0$

sur AD et BC $U = Y\,(Y - \frac{1}{2})$ $V = 0$

la solution est alors :

$$U = Y\,(Y - \frac{1}{2}) \qquad V = 0 \qquad P = 2X + K$$

le maillage est le suivant :



On prend comme condition initiale $U = 0$ $V = 0$, le pas en temps est pris égal à 0.1 s.

Les conditions aux limites présentent donc une discontinuité en temps au premier pas de temps.

La pression est imposée nulle au point 3 donc $K = 0$.

Résultats : Tous les résultats présentent la symétrie suivant la droite $Y = \frac{1}{4}$

ITERATION N° 1

Noeuds	U calculé	U exact	V calculé	V exact
7 37	$-0.4700\ 10^{-1}$	$(-0.46875\ 10^{-1})$	$0.1256\ 10^{-3}$	0
12 32	$-0.4684\ 10^{-1}$	"	$0.6054\ 10^{-4}$	"
17 27	$-0.4698\ 10^{-1}$	"	$0.2656\ 10^{-4}$	"
22	$-0.4717\ 10^{-1}$	"	$0.1999\ 10^{-17}$	"
8 38	$-0.6228\ 10^{-1}$	$-0.6225\ 10^{-1}$	$-0.1351\ 10^{-16}$	"
13 33	$-0.6219\ 10^{-1}$	"	$-0.9481\ 10^{-17}$	"
18 28	$-0.6023\ 10^{-1}$	"	$-0.6139\ 10^{-17}$	"
23	$-0.6191\ 10^{-1}$	"	$-0.1506\ 10^{-17}$	"

Noeuds	Pression calculée	Pression exacte
1	$0.1301\ 10^{-1}$	0
11	0.6341	0.5000
13	0.6325	"
21	1.258	1.000
23	1.258	1.000
31	1.883	1.500
33	1.884	1.500
41	2.504	2.000
43	2.517	2.000

L'écoulement est pratiquement stabilisé à la 4ème itération.

A la 10ème itération on obtient :

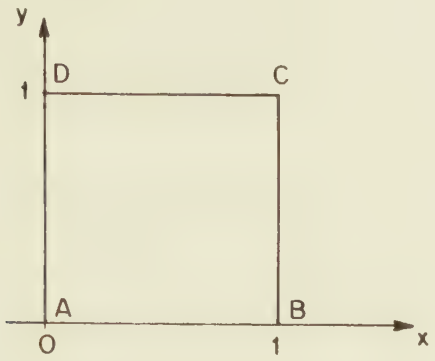
Noeuds	U calculé	V calculé
7 37	$-0.46875\ 10^{-1}$	$0.1057\ 10^{-16}$
12 32	"	$-0.7017\ 10^{-17}$
17 27	"	$-0.1659\ 10^{-17}$
22	"	$-0.1021\ 10^{-16}$
8 38	$-0.6225\ 10^{-1}$	$-0.1153\ 10^{-6}$
13 33	"	$-0.1351\ 10^{-16}$
18 28	"	$-0.9781\ 10^{-16}$
23	"	$-0.4881\ 10^{-17}$

Noeuds	Pression calculée
1	$0.3497\ 10^{-14}$
11	0.50000
13	0.50000
21	1.0000
23	1.0000
31	1.5000
33	1.5000
41	2.0000
43	2.0000

2ème test

On considère maintenant un écoulement bidimensionnel non permanent.

Le domaine Ω est le carré $]0,1[\times]0,1[$



Les conditions aux limites sont sur

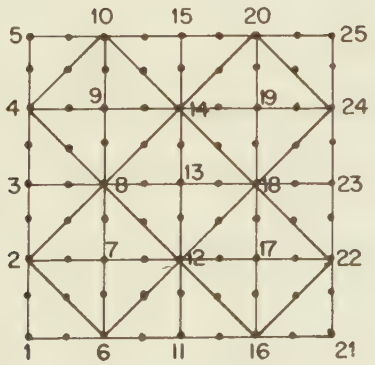
AB	u = Xt	V = 0
BC	U = Xt	V = -Yt
CD	U = Xt	V = -Yt
AD	u = 0	V = -Yt

La variation cinématique ν et la masse volumique ρ sont égales à 1, le champ de forces $\vec{F}$ est nul.

La solution exacte est alors dans Ω

$$U = Xt$$
$$V = -Yt$$
$$P = \frac{-X^2 + Y^2}{2} + K$$

Le maillage est le suivant :



Le pas en temps est 0.1 s, la pression est prise nulle au point (0,0.5) donc K = 0.03125.

Le champ de vitesses calculé à chaque pas en temps représente une bonne approximation du champ réel, le maximum d'erreur relative sur les vitesses étant de l'ordre de 10^{-4}.

Le champ de pression obtenu est indépendant du temps et égal à :

Noeuds	Pression calculée	Pression exacte
1	- 0.03357	- 0.03125
3	0.08765	0.09375
4	0.2500	0.2500
5	0.4664	0.46875
6	- 0.06754	- 0.0625
7	- 0.03357	- 0.03125
8	0.05967	0.0625
9	0.2174	0.21875
10	0.4328	0.4375
11	- 0.1548	- 0.15625
12	- 0.1268	- 0.1250
13	- 0.03358	- 0.03125
14	0.1232	0.1250
15	0.3452	0.34375
16	- 0.3172	- 0.3125
17	- 0.2836	- 0.28125
18	- 0.1903	- 0.1875
19	- 0.03358	- 0.03125
20	0.1828	0.1875
21	- 0.5336	- 0.53125
22	- 0.5000	- 0.5000
23	- 0.4124	- 0.40625
24	- 0.2500	- 0.2500
25	- 0.03358	- 0.03125

3ème exemple

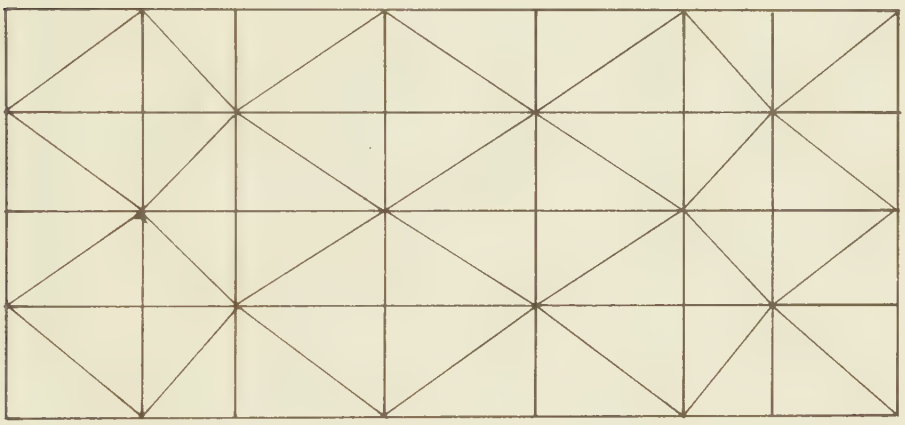
On se propose maintenant de déterminer l'écoulement d'un jet dans une cavité en forme de chicane.

Le domaine Ω est le rectangle $]0,0.4[\times]0,0.018[$

La viscosité cinématique est égale à 3.10^{-6}, la masse volumique égale à 1 (unités M.K.S.) ; le champ de forces est nul.

La vitesse est imposée nulle à la paroi, les vitesses d'entrée et de sortie sont égales à 6 mm/s.

Le maillage est le suivant :



Le pas en temps est pris égal à 0.1 s, le calcul est mené jusqu'à l'obtention d'un écoulement stationnaire (environ 30 itérations). Les figures suivantes montrent le champ de vitesses permanent obtenu d'une part dans le cas linéaire (figure 1), d'autre part dans le cas non linéaire (figure 2), ces résultats sont en accord avec des mesures effectuées au L.N.H. On constate d'autre part que pour un nombre de Reynolds plus élevé le calcul devient instable dans le cas non linéaire.

FIGURE 1

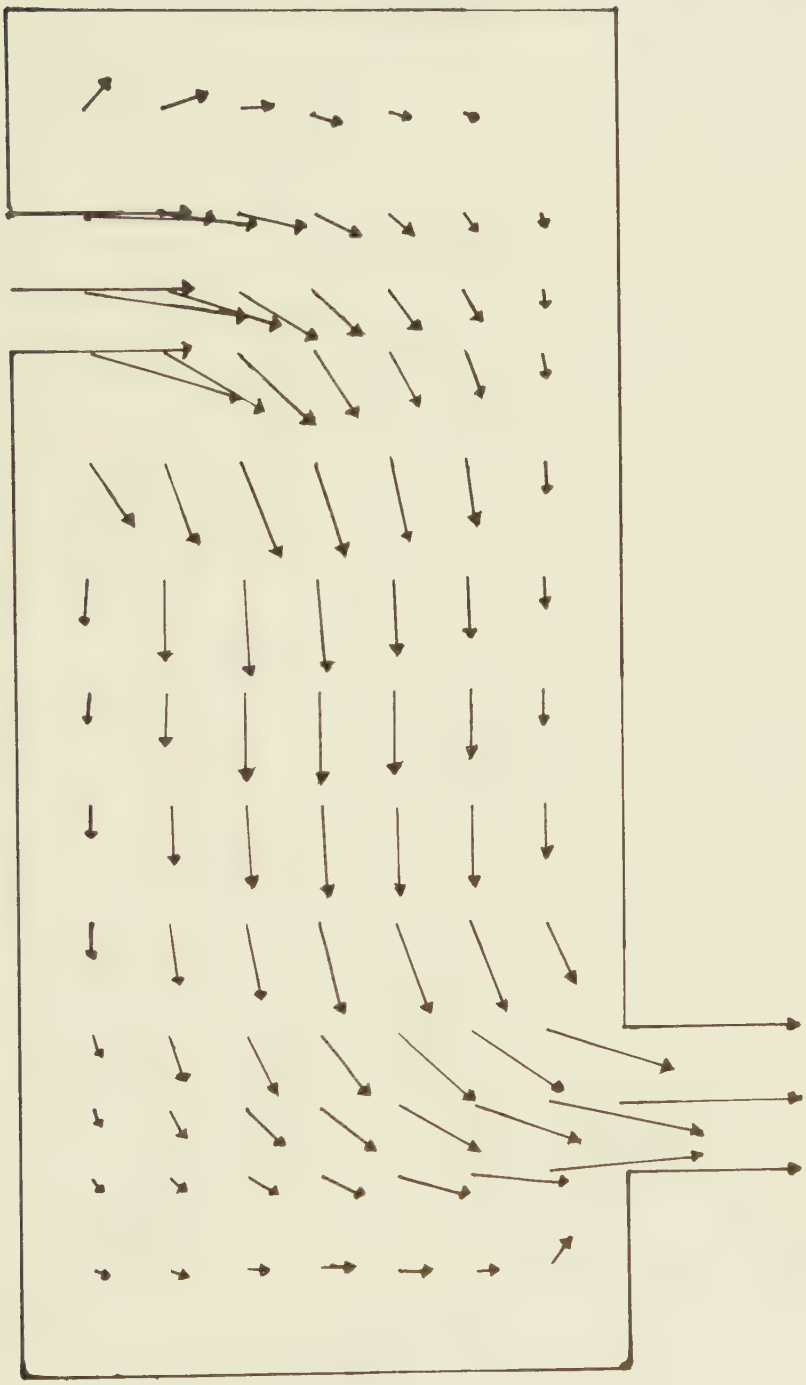
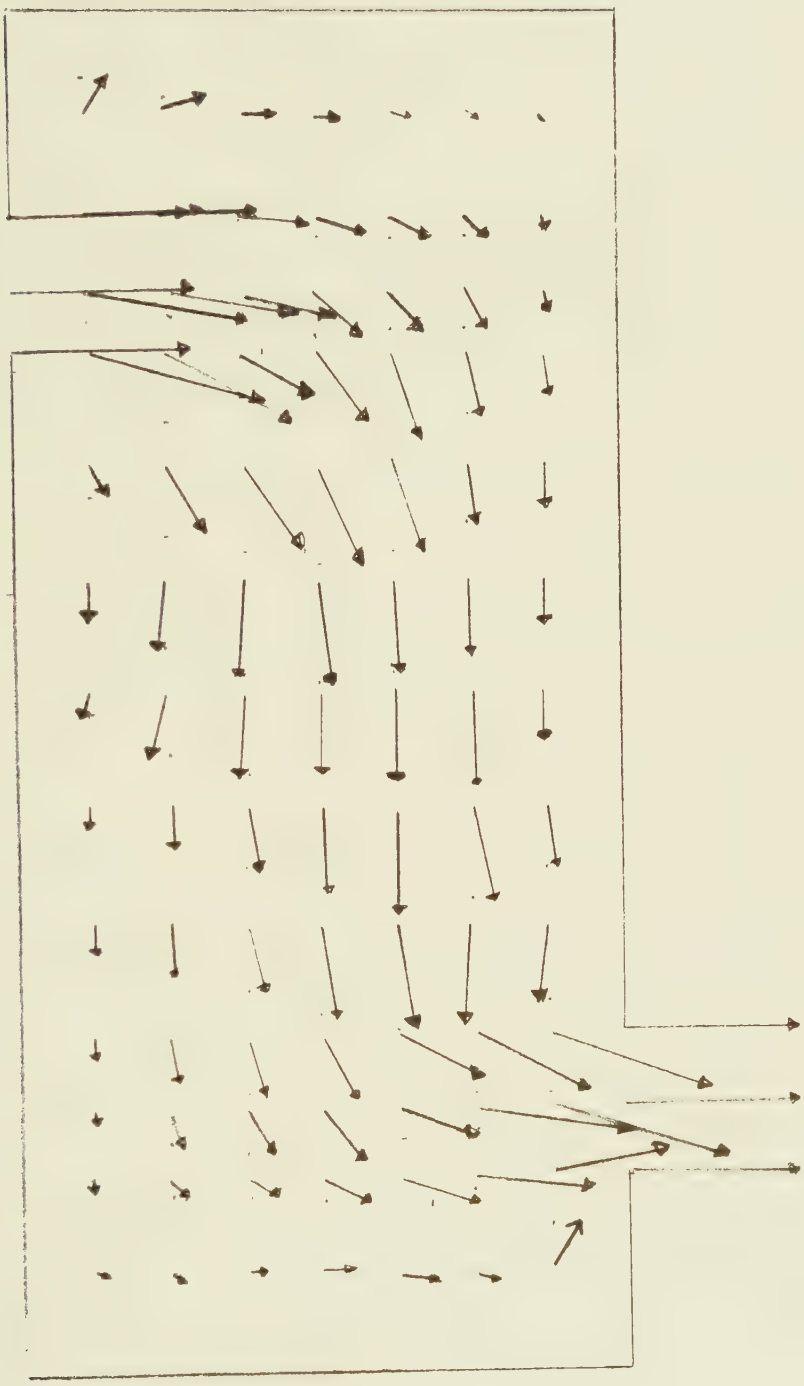


FIGURE 2



CONCLUSION

Les méthodes employées pour les opérateurs hyperboliques ont donné des résultats très satisfaisants. Le schéma de type Crank-Nicholson allié à une méthode en éléments finis conforme n'introduit ni déphasage, ni amortissement et permet le choix d'un grand pas en temps.

La méthode décrite pour le problème de Stokes donne de bons résultats mais cette méthode ne semble pas adaptée à l'équation de Navier Stokes dès que le phénomène non linéaire est prépondérant. Il semble qu'une méthode à pas fractionnaires séparant la diffusion et la convection permettrait d'augmenter le nombre de Reynolds.

K.O. FRIEDRICHS

[1] Symmetric Positive Linear Differential Equations
Communication on pure and Applied Mathematics
Vol. XI, pp 333-418 (1958).

P. LESAINT

[1] Finite Element Methods for Symmetric Hyperbolic Equations
Numer. Math. 21 pp 244-255 (1973) - Springer Verlag.

[2] Finite Element Method for the Transport Equation
R.A.I.R.O. (Août 1974, R-2, pp 67 à 94).

[3] P. LESAINT - P.A. RAVIART : On a finite element method for solving the neutron transport equation
Mathematical aspects of inite elements in partial differential equations C 1974 - Academic Press, Inc.

O.C. ZIENKIEWICZ

[1] The Finite Element Method in Engineering Science -
Mac Graw Hill, London, 1971.

R. TEMAM

[1] Thèse

[2] Cours du Maryland

[3] R. TEMAM et F. THOMASSET : Numerical Solution of Navier Stokes equations by a finite element method - Rapport I.R.I.A.

YANENKO [1] Méthode à pas fractionnaires

A. DAUBERT - J.P. BENQUE [1] : Utilisation des modèles mathématiques pour la réfrigération des centrales installées en bord de mer - Rapport E.D.F.

ANNEXE - PROGRAMME DE CALCUL

Nous sommes partis d'un programme existant déjà à E.D.F. qui traitait l'élasticité linéaire ou l'équation :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ U_{|\Gamma_1} = g \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma_2} = h \end{cases}$$

pour une structure isolée ; c'est-à-dire que le domaine Ω était traité en un seul morceau.

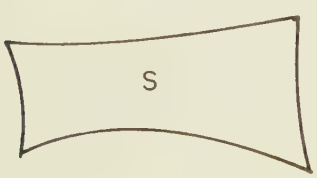
Le programme actuel est divisé en deux parties distinctes :

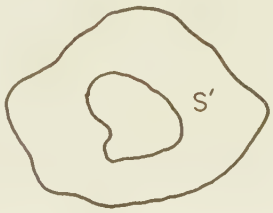
- un premier programme PR1 destiné à fournir automatiquement les différentes numérotations nécessaires ;
- le deuxième programme PR2 effectue le calcul en éléments finis en utilisant des données fournies par PR1.

1 - PROGRAMME PR1

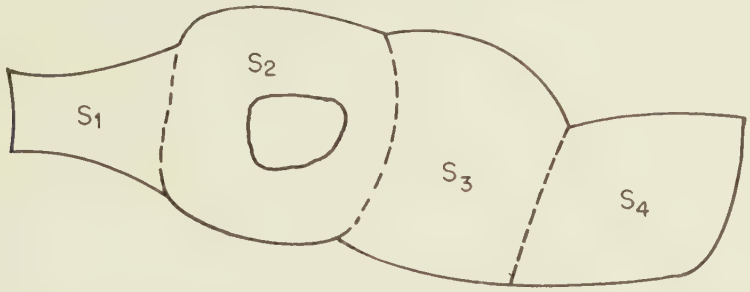
Le domaine Ω est divisé en un certain nombre de sous-structures S_1 S_2 ... S_n. Le calcul se fera sous-structure par sous-structure puis les sous-structures seront assemblées en tenant compte des périodicités éventuelles (identité de plusieurs sous-structures).

Le code de calcul ne considère pour l'instant que des sous-structures homéomorphes au rectangle ou à l'anneau





un domaine pourra donc être représenté de la façon suivante :



Chaque sous-structure sera traitée séparément par le programme PR1. En fait on ne traitera que les sous-structures non "similaires", cette notation étant définie plus loin.

Le programme PR1 n'utilise que des variables entières et fournit une grille de référence (qui sera ensuite déformée par les applications F_T pour donner la sous-structure réelle).

On donne :

JOUVER = { 0 sous-structure type anneau
         { 1 sous-structure type rectangle

IRA, IRB nombre de points de discrétisation dans deux directions X Y pour le rectangle et en R et θ pour l'anneau.

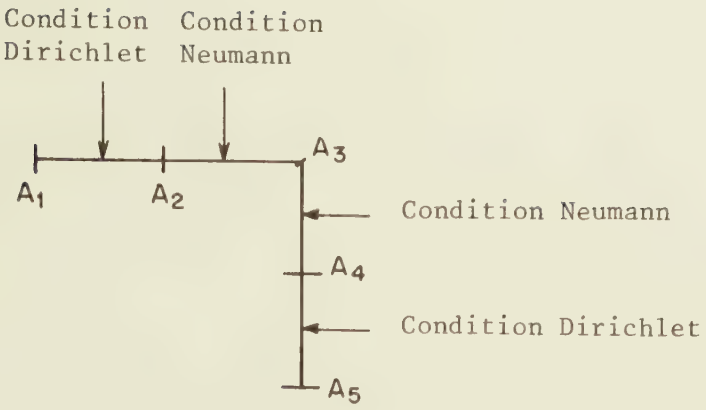
IRA et IRB doivent être impairs pour l'approximation P_2 car chaque point de discrétisation sera un point de la grille (figure 1).

NDIM dimension de l'espace

NPOIN nombre de points de l'élément fini (3 pour P_1, 6 pour P_2...)

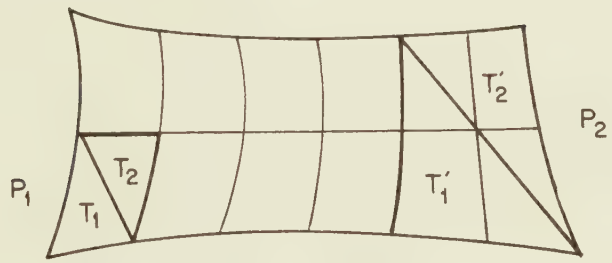
Enfin on donne une description des conditions aux limites. On appelle bord une partie continûment différentiable de la frontière sur laquelle les conditions aux limites (pour la sous-structure) sont d'un type déterminé.

Exemple



Dans cet exemple il y a 4 bords $A_1\ A_2$ $A_2\ A_3$ $A_3\ A_4$ $A_4\ A_5$.

Figure 1



Les bords sont repérés par leurs extrémités (indices entiers de la grille I = 1 → IRA, J = 1 → IRB), par l'appartenance à une face et par des "clés" indiquant le type de condition.

1 si le bord de la sous-structure est intérieur à Ω c'est-à-dire pas de condition aux limites (mais raccordement à une autre sous-structure)

$\neq$ 1 si le bord de la sous-structure est frontière de Ω :

2 si la condition est de type Dirichlet

3 si la condition est de type Neumann

4 si la condition est d'un autre type (par exemple $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$).

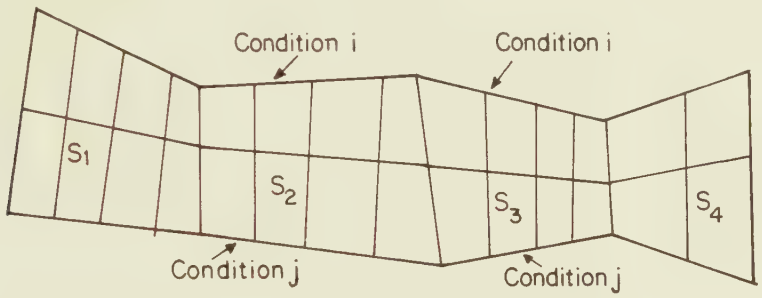
Le programme génère

- Une variable KBOR qui indique pour chaque point du maillage si ce point est bord de la sous-structure ou non :

- Une variable IW qui pour chaque triangle donne la nature des conditions sur les 3 faces du triangle. Cette variable est produite à partir des clés données pour les bords de la sous-structure et des KBOR de chaque point ;
- Une variable IG qui attribue à chaque élément et à chaque point de cet élément un couple I,J de la grille initiale ;
- Enfin une numérotation différente plus adaptée au sous-assemblage, les points étant numérotés en tenant compte des conditions aux limites.

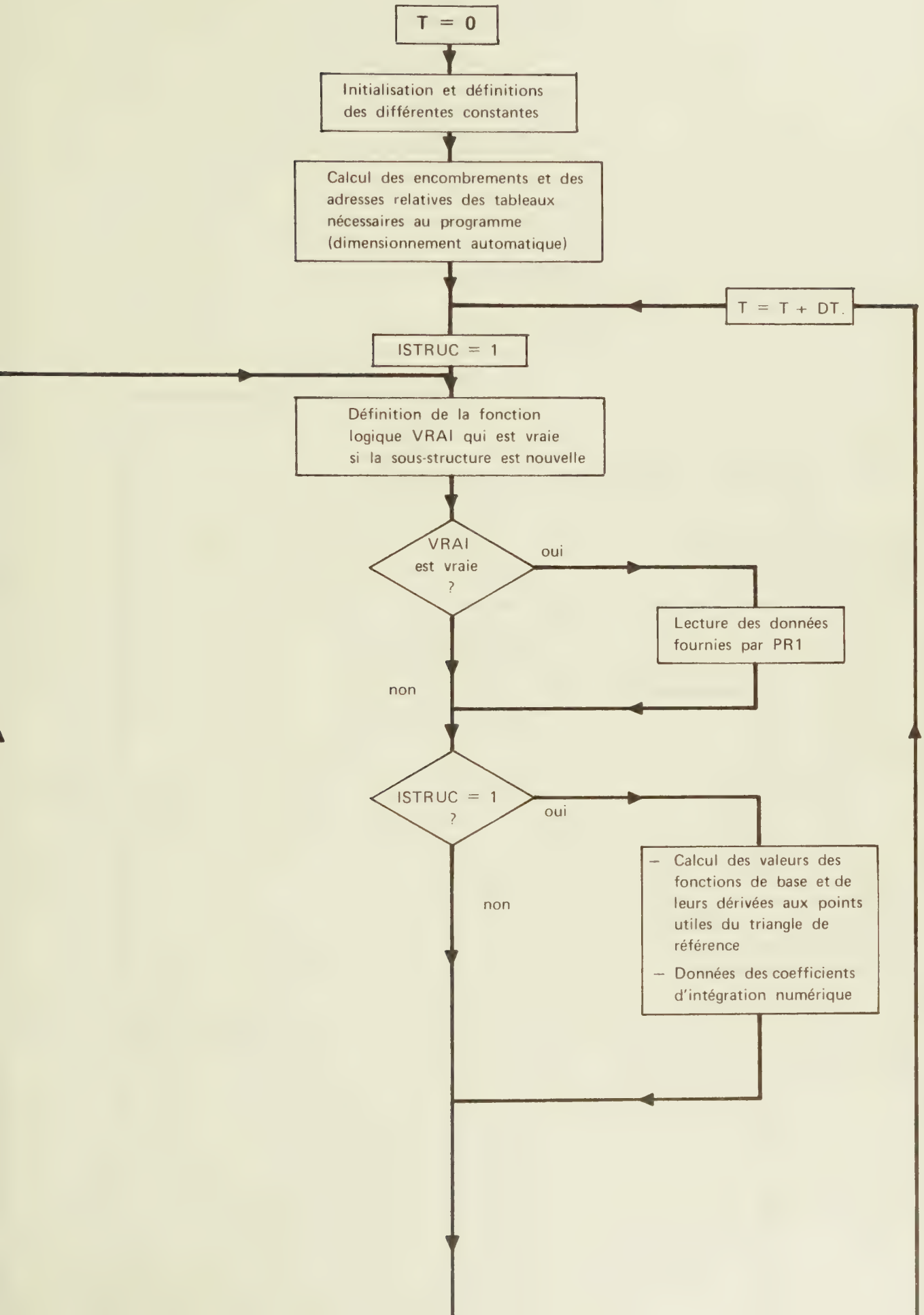
Remarque :

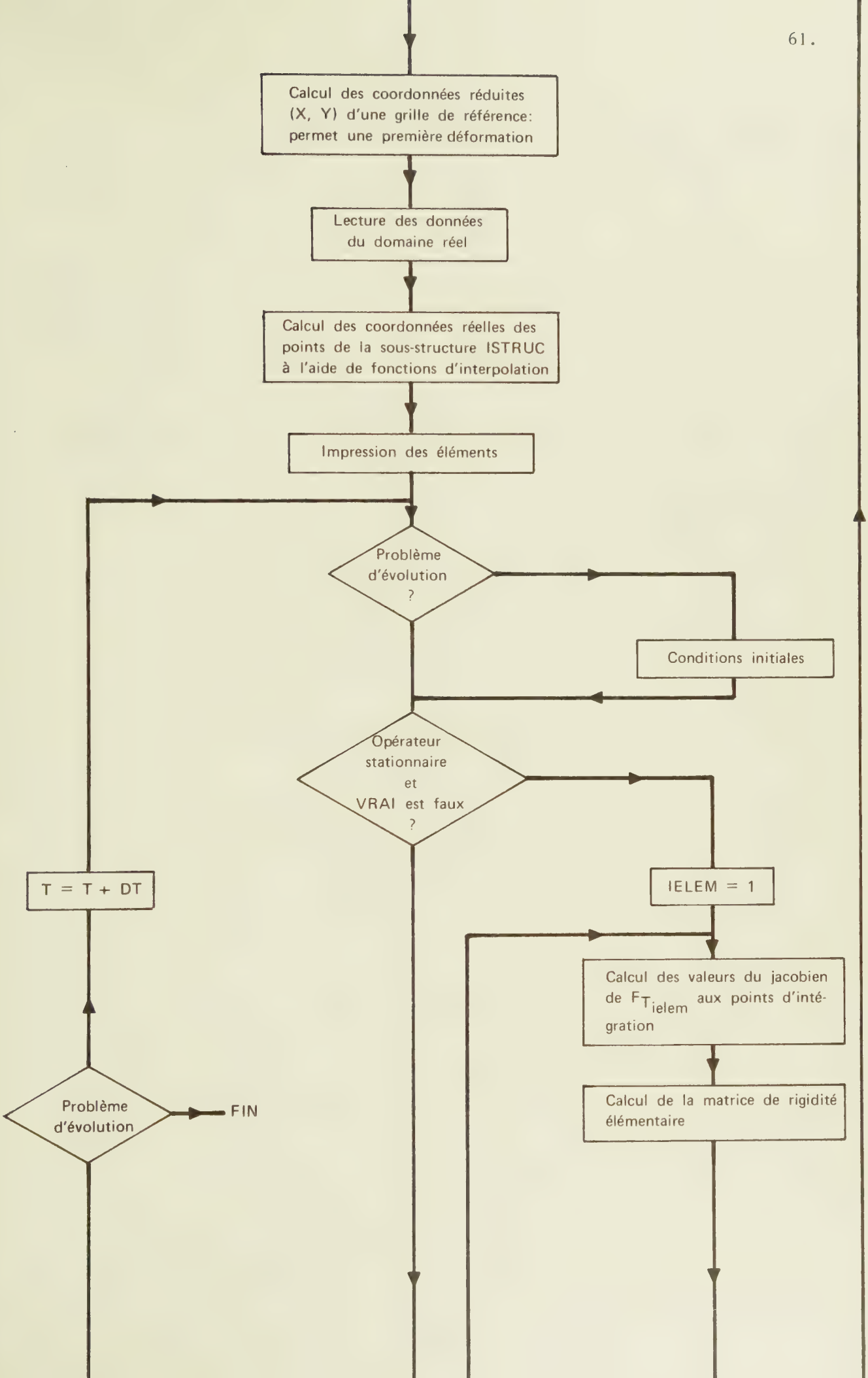
Deux sous-structures seront similaires si leur grille et leurs conditions de bord sont identiques ; dans ce cas le programme PR1 n'est effectué que pour une seule sous-structure exemple :

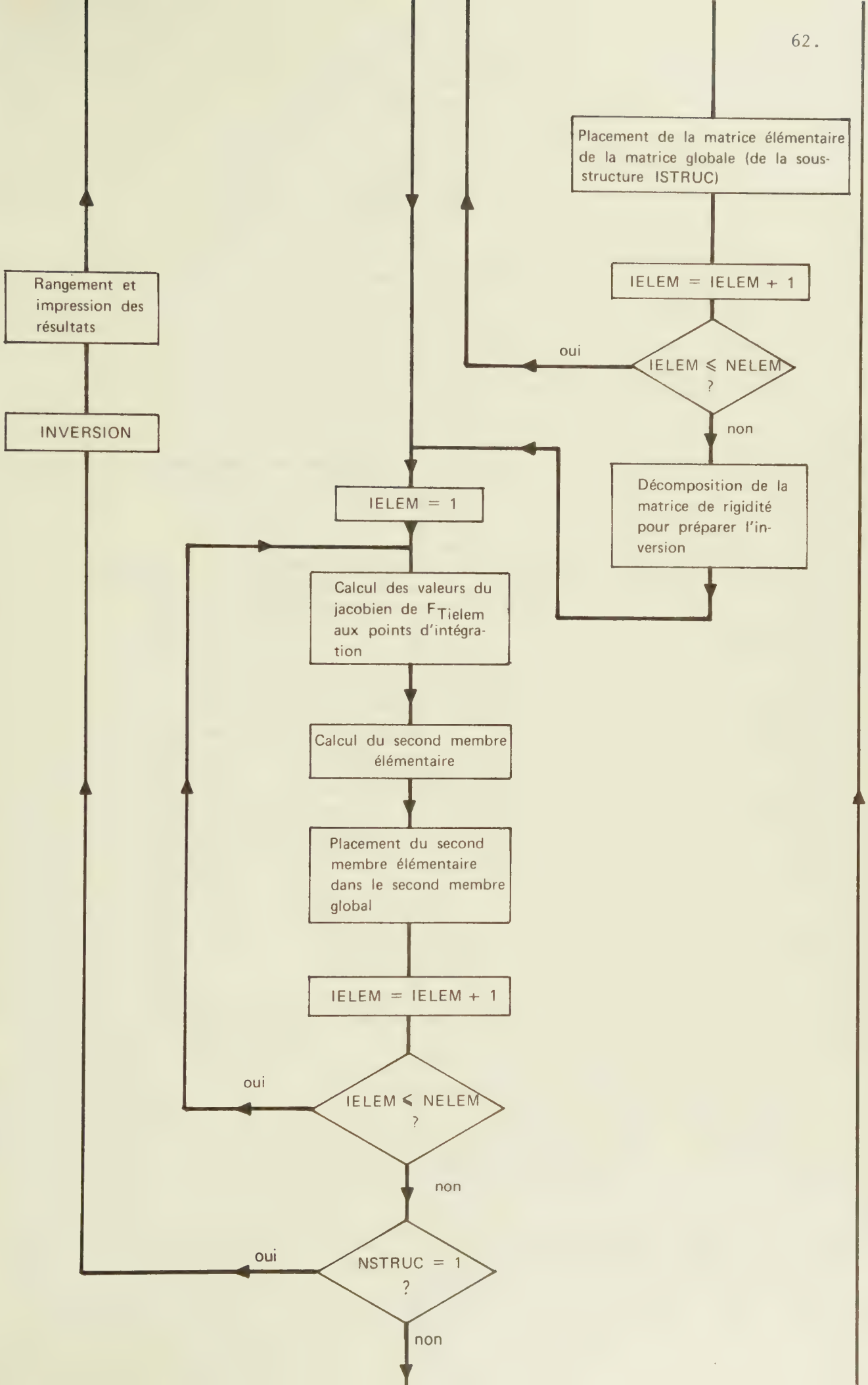


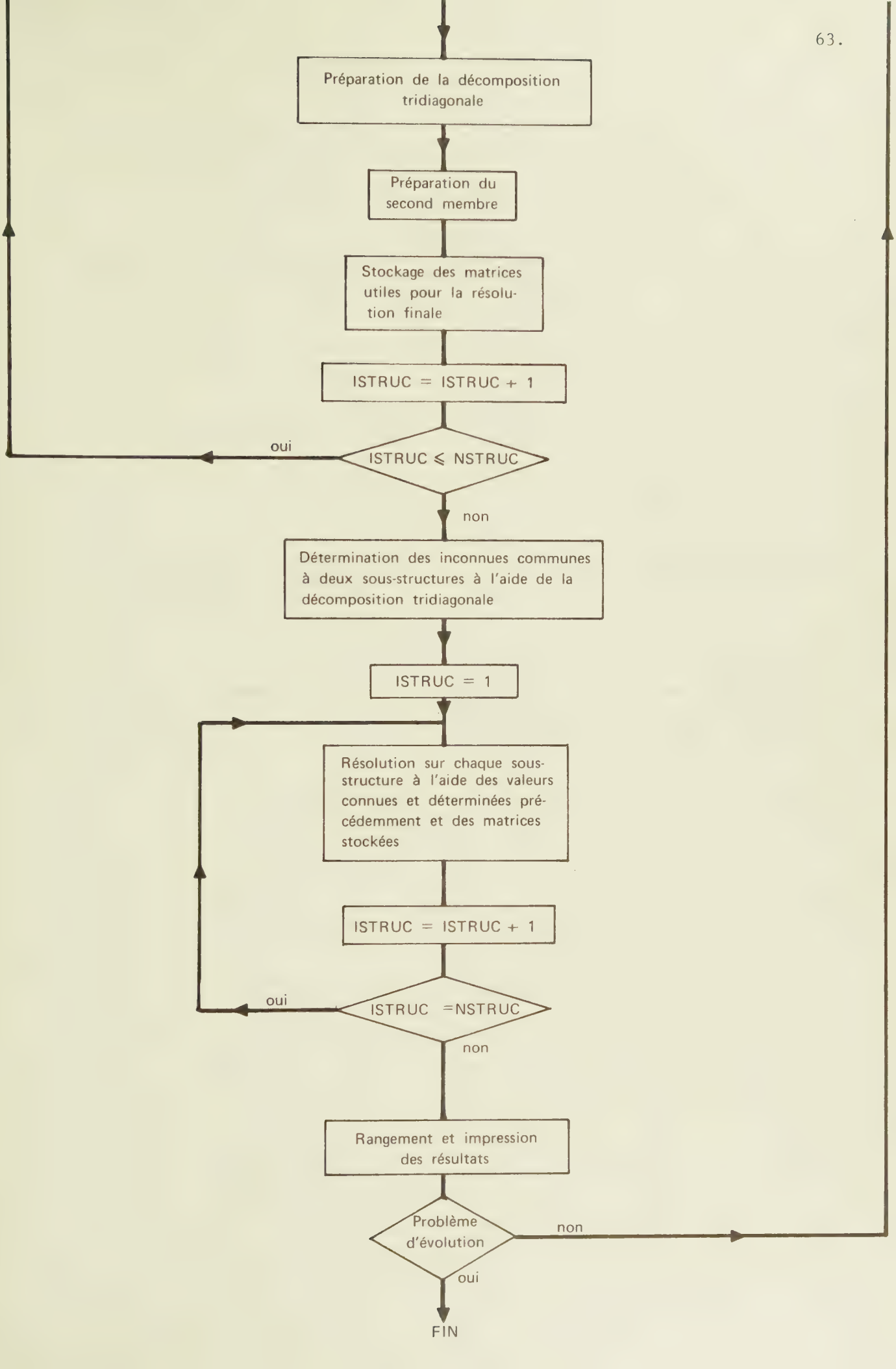
les sous-structures S_2 et S_3 sont alors similaires.

ORGANIGRAMME DE PR 2



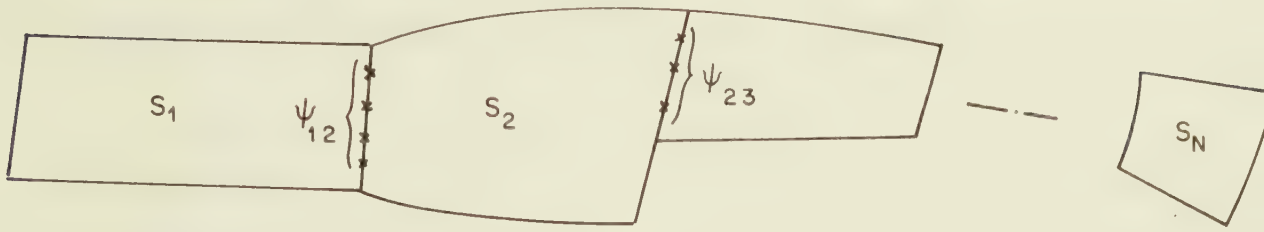

Calcul des coordonnées réduites (X, Y) d'une grille de référence: permet une première déformation
Lecture des données du domaine réel
Calcul des coordonnées réelles des points de la sous-structure ISTRUC à l'aide de fonctions d'interpolation
Impression des éléments
Problème d'évolution ?
Conditions initiales
Opérateur stationnaire et VRAI est faux ?
IELEM = 1
Calcul des valeurs du jacobien de $F_{T_{ielem}}$ aux points d'intégration
Calcul de la matrice de rigidité élémentaire
T = T + DT
Problème d'évolution
FIN


Placement de la matrice élémentaire de la matrice globale (de la sous-structure ISTRUC)
IELEM = IELEM + 1
oui
IELEM ⩽ NELEM ?
non
Décomposition de la matrice de rigidité pour préparer l'inversion
Rangement et impression des résultats
INVERSION
IELEM = 1
Calcul des valeurs du jacobien de F_{Tielem} aux points d'intégration
Calcul du second membre élémentaire
Placement du second membre élémentaire dans le second membre global
IELEM = IELEM + 1
oui
IELEM ⩽ NELEM ?
non
oui
NSTRUC = 1 ?
non


Préparation de la décomposition tridiagonale
Préparation du second membre
Stockage des matrices utiles pour la résolution finale
ISTRUC = ISTRUC + 1
oui
ISTRUC ⩽ NSTRUC
non
Détermination des inconnues communes à deux sous-structures à l'aide de la décomposition tridiagonale
ISTRUC = 1
Résolution sur chaque sous-structure à l'aide des valeurs connues et déterminées précédemment et des matrices stockées
ISTRUC = ISTRUC + 1
oui
ISTRUC =NSTRUC
non
Rangement et impression des résultats
Problème d'évolution
non
oui
FIN

ALGORITHME TRIDIAGONAL

Considérons N sous-structures S_1 S_2 ... S_N

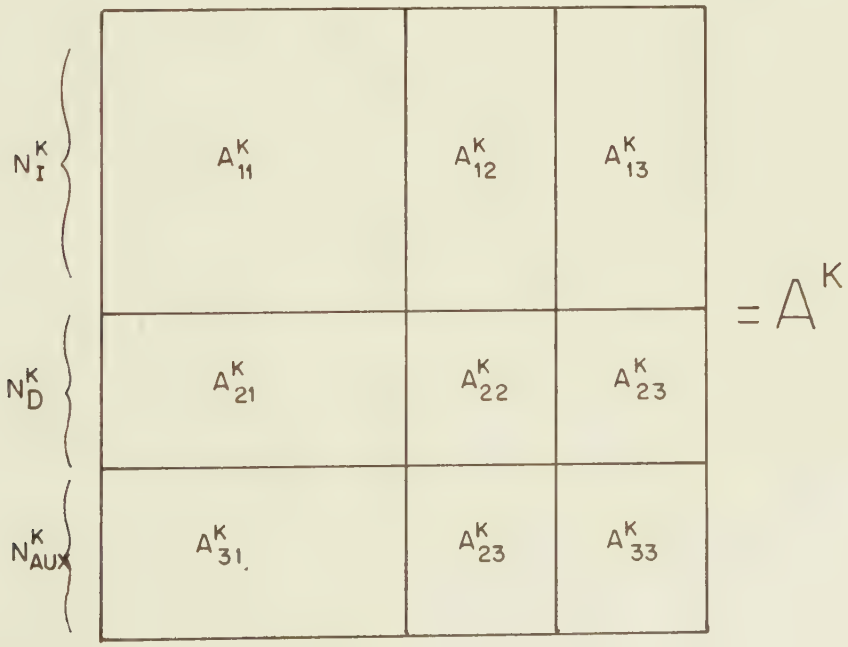


Pour simplifier on considèrera le problème suivant $-\Delta u = f$ dans $\Omega = \bigcup_{k=1}^{N} S_K$

avec $U|_{\Gamma_1} = g$ $\quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h$ $\quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$

Soit ψ_{12} ψ_{23} ... $\psi_{(N-1)N}$ les valeurs des points intérieurs à Ω communes aux sous-structures 1-2 2-3.

Considérons la matrice de rigidité d'une sous-structure S_K . Cette matrice correspondra à la discrétisation d'un problème de Neumann sur cette sous-structure (approximation de $H^1(S_K)$) cette matrice sera rangée de la façon suivante :



N_I^K représentant le nombre de points intérieurs et point de $\partial\Omega$ pour lesquels la condition à la limite est une condition autre que $u_{|\Gamma_1} = g$

N_D^K points de $\partial\Omega$ tels que $U_{|\Gamma_1} = g$

N_{AUX}^K nombre de points de $S_{K-1} \cap S_K$ et $S_K \cap S_{K+1}$ (n'appartenant pas à $\partial\Omega$.

Les valeurs aux noeuds et les seconds membres sont rangés de la même façon que A.

Pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad S_K \\ U_{|\Gamma_1} \cap \partial S_K = g \\ \frac{\partial u}{\partial n}|\Gamma_2 \cap \partial S_K = h \\ \frac{\partial u}{\partial n} \mid S_K \cap (S_{K-1} \cup S_{K+1}) = 0 \end{cases}$$

le système linéaire s'écrirait :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A_{11}^K & A_{12}^K & A_{13}^K \\ \hline A_{21}^K & A_{22}^K & A_{23}^K \\ \hline A_{31}^K & A_{32}^K & A_{33}^K \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \psi_I^K \\ \hline \psi_D^K \\ \hline \psi_{K-1,K} \\ \psi_{K,K+1} \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|} \hline \Sigma_I^K \\ \hline \Sigma_D^K \\ \hline \Sigma_{K-1,K} \\ \Sigma_{K,K+1} \\ \hline \end{array}$$

où les ψ_D^K sont des valeurs connues (condition de type Dirichlet).

Remarque : A_{11}^K est inversible elle correspond à la matrice de discrétisation d'un problème de Dirichlet sur S_K. Par une élimination de ψ_I^K on obtient le système équivalent suivant :

$$(I)\quad \begin{cases} \textcircled{1}\quad \psi_I^K + \left(A_{11}^K\right)^{-1} A_{13}^K \begin{pmatrix} \psi_{K-1,K} \\ \psi_{K,K+1} \end{pmatrix} = \left(A_{11}^K\right)^{-1} \left(\Sigma_I^K - A_{12}^K \psi_D^K\right) \\ \textcircled{2}\quad \left(A_{33}^K - A_{31}\left(A_{11}^K\right)^{-1} A_{13}\right) \begin{pmatrix} \psi_{K-1,K} \\ \psi_{K,K+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{K-1,K} \\ \Sigma_{K,K+1} \end{pmatrix} - A_{32}^K \psi_D^K - A_{31}^K \left(A_{11}^K\right)^{-1} \left(\Sigma_I^K - A_{12}^K\right) \end{cases}$$

L'égalité (2) dans ce système linéaire I n'est pas en général vérifiée pour le problème que nous nous proposons de résoudre.

Pour chaque sous-structure on va remplacer A^K par les matrices apparaissant au premier membre de I on remplace les seconds membres Σ^K par les seconds membres de (I).

La quantité

$$\left(A_{33}^K - A_{31}\left(A_{11}^K\right)^{-1} A_{13}\right)\begin{pmatrix} \psi_{K-1,K} \\ \psi_{K,K+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma_{K-1,K} \\ \Sigma_{K,K+1} \end{pmatrix} + A_{32}\, \psi_D + A_{31}\, A_{11}^{-1} \left(\Sigma_I^K - A_{12}^K\, \psi_D^K\right)$$

représentant le flux traversant les parois fictives $S_K \cap S_{K-1}$ $S_{K+1} \cap S_K$, on va déterminer les $\psi_{i,i+1}$ $i = 1 \ldots N-1$ en écrivant un bilan de flux à savoir que le flux entrant dans S_K par $S_{K-1} \cap S_K$ est égal au flux sortant de S_{K-1} par $S_{K-1} \cap S_K$ on obtient un système tridiagonal par bloc :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline B^1+B^2 & B^2 & \\ \hline B^2 & B^2+B^3 & B^3 \\ \hline & B^3 & \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline B^{n-2}+B^n & B^{n-1} \\ \hline B^{n-1} & B^{n-1}+B^n \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \Psi_{12} \\ \hline \Psi_{23} \\ \hline \vdots \\ \hline \Psi_{N-2,N-1} \\ \hline \Psi_{N-1,N} \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline S^1+S^2 \\ \hline S^2+S^3 \\ \hline \vdots \\ \hline \\ \hline S^{n-1}+S^n \\ \hline\end{array}$$

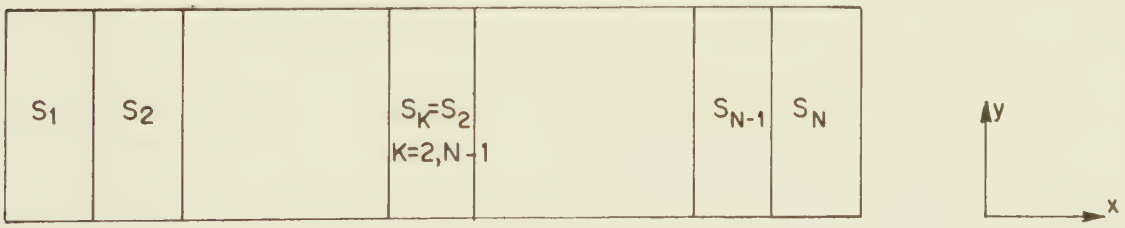
avec $$B^K = A_{33}^K - A_{31}^K \left(A_{11}^K\right)^{-1} A_{13}$$

$$S^K = \begin{pmatrix}\Sigma_{K-1,K} \\ \Sigma_{K,K+1}\end{pmatrix} - A_{32}^K \Psi_D^K - A_{31}^K \left(A_{11}^K\right)^{-1} \left(\Sigma_I^K - A_{12}^K \Psi_D^K\right)$$

L'inversion de ce système permet de déterminer tous les $\Psi_{i,i+1}$. On utilise alors pour chaque sous-structure les égalités (1) de déterminer les valeurs encore inconnues.

Les intérêts pratiques de cette méthode sont :

- une utilisation de la périodicité éventuelle du domaine. En effet considérons par exemple un rectangle avec des conditions aux limites de nature



constante en X alors l'encombrement des matrices utiles sera inférieur à l'encombrement des matrices de rigidité de S_1 S_{N-1} S_N ;

- la facilité dans le cas où l'encombrement est trop important pour un problème non périodique ou non stationnaire (opérateur dépendant de (X,Y)) d'utiliser des mémoires à accès direct. Cette résolution est en effet à peu près équivalente à une résolution matricielle par blocs (les blocs étant ici déterminés par les sous-structures et non choisis arbitrairement).

TPLD – 95100 ARGENTEUIL

TPLD – 95100 ARGENTEUIL